Il teorema dei seni

In questa dispensa viene presentato il teorema dei seni, che, insieme a quello del coseno, permette la risoluzione dei triangoli qualunque.

Dopo aver introdotto la convenzione per le notazioni usata in trigonometria, viene enunciato e dimostrato il teorema dei seni.

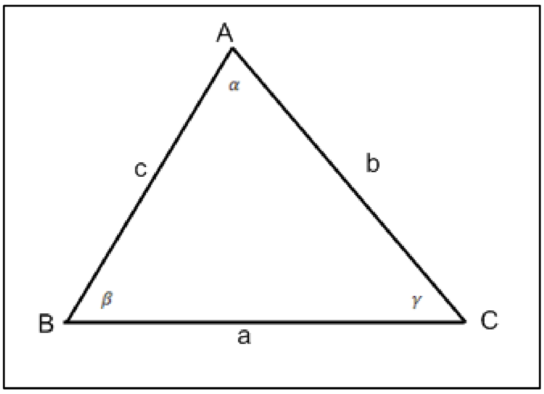
Viene poi mostrata su un esempio l'applicazione del teorema nella risoluzione di un triangolo dato un lato e due angoli.

Introduzione

Il **teorema dei seni**, insieme a quello del coseno (di Carnot), permette la **risoluzione di un triangolo** qualsiasi (non necessariamente rettangolo), cioè la determinazione di tutti i suoi elementi (lati e angoli), noti solo alcuni di essi, sotto determinate condizioni.

Cominciamo con l'introdurre una convenzione, largamente usata in trigonometria, per i nomi dei lati e degli angoli di un triangolo.

I vertici di un triangolo vengono indicati con le prime lettere maiuscole dell'alfabeto (A, B, C), gli angoli con le corrispondenti lettere minuscole dell'alfabeto greco (α, β, γ) e i lati opposti a ciascuno di essi con le corrispondenti lettere minuscole dell'alfabeto (a, b, c), come in figura.



Per non rendere troppo pesante il discorso, anche se con abuso di notazione, si indicano gli stessi simboli per indicare i lati e gli angoli e le rispettive misure.

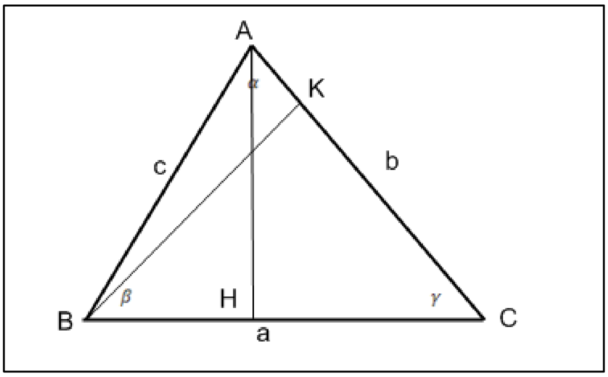
Teorema dei seni

Dato un triangolo, indicati i lati e gli angoli con la convenzione esposta, si ha:

$$\frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{b}{sen\ \beta} = \frac{c}{sen\ \gamma}$$

Per dimostrare il teorema, trattiamo separatamente i casi di triangolo acutangolo e triangolo ottusangolo.

Triangolo acutangolo



Con riferimento alla figura, sia AH l'altezza relativa a BC; considerando il triangolo rettangolo ABH, si ha:

$$AH = c\ sen\ \beta$$

Considerando il triangolo rettangolo ACH, si ha:

$$AH = b\ sen\ \gamma$$

Dal confronto delle precedenti espressioni si ha $c\ sen\ \beta = b\ sen\ \gamma$ e, dividendo primo e secondo membro per $sen\ \beta\ sen\ \gamma$, si ha:

$$\frac{b}{sen\ \beta} = \frac{c}{sen\ \gamma}$$

Sia poi BK l'altezza relativa ad AC; considerando il triangolo rettangolo ABK, si ha:

$$BK = c\ sen\ \alpha$$

Considerando il triangolo rettangolo BCK, si ha:

$$BK = a\ sen\ \gamma$$

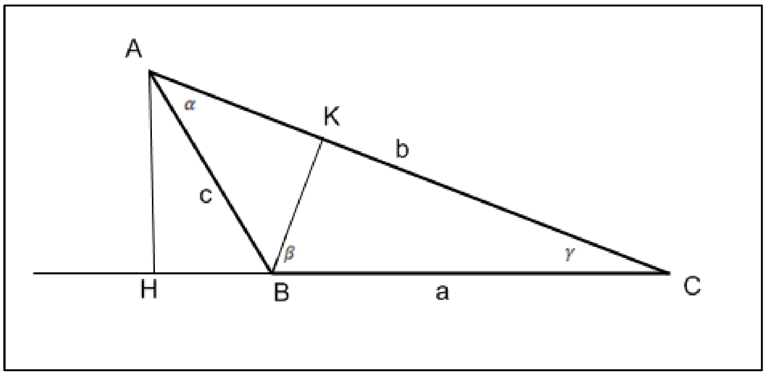
Dal confronto delle due espressioni si ha $c\ sen\ \alpha = a\ sen\ \gamma$, quindi:

$$\frac{c}{sen\ \gamma} = \frac{a}{sen\ \alpha}$$

Ricordando che $\frac{c}{sen\ \gamma} = \frac{b}{sen\ \beta}$, si ha infine:

$$\frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{b}{sen\ \beta} = \frac{c}{sen\ \gamma}$$

Triangolo ottusangolo



Con riferimento alla figura, sia AH l'altezza relativa a BC, che in questo caso, essendo il triangolo ottusangolo, giace all'esterno di esso; considerando il triangolo rettangolo ABH, si ha:

$$AH = c\ sen\ (\pi - \beta) = c\ sen\ \beta$$

tenendo conto che due angoli supplementari hanno lo stesso seno.

Considerando il triangolo rettangolo ACH si ha:

$$AH = b\ sen\ \gamma$$

Dal confronto delle due espressioni si ha, ragionando come nel caso del triangolo acutangolo:

$$\frac{b}{sen\ \beta} = \frac{c}{sen\ \gamma}$$

Sia poi BK l'altezza relativa ad AC; considerando i triangoli rettangoli ABK e BCK e ragionando come nel caso del triangolo acutangolo, si ha:

$$\frac{c}{sen\ \gamma} = \frac{a}{sen\ \alpha}$$

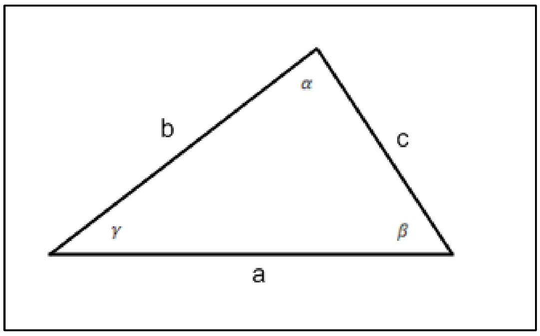
Dal confronto delle due precedenti espressioni, abbiamo anche in questo caso:

$$\frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{b}{sen\ \beta} = \frac{c}{sen\ \gamma}$$

Applicazioni

Il teorema dei seni permette di risolvere un triangolo nel caso in cui sia noto un lato e due angoli. Il terzo angolo si può facilmente ricavare ricordando che la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a un angolo piatto, mentre gli altri due lati si ricavano applicando il teorema dei seni, come ora vedremo su un esempio.

Risolvere il triangolo sapendo che un lato misura 18 metri e gli angoli ad esso adiacenti sono di 43° e 65°



Con riferimento alla figura, abbiamo che $a = 18$, $\gamma = 43°$ e $\beta = 65°$ (le lunghezze si intendono espresse in metri, anche se non esplicitato).

Intanto possiamo ricavare il terzo angolo

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 72°$$

Per ricavare b applichiamo il teorema dei seni:

$$\frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{b}{sen\ \beta}$$

Esplicitando b, si ha:

$$b = \frac{a\ sen\ \beta}{sen\ \alpha} = \frac{18\ sen\ 65°}{sen\ 72°} = \frac{18 \cdot 0.9063}{0.951} = 17.15$$

In modo analogo possiamo ricavare c:

$$\frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{c}{sen\ \gamma}$$

$$c = \frac{a\ sen\ \gamma}{sen\ \alpha} = \frac{18\ sen\ 43°}{sen\ 72°} = \frac{18\ \cdot 0.6819}{0.951} = 12.91$$