Il teorema del coseno (o di Carnot)

In questa dispensa presenteremo il **teorema del coseno** (detto anche teorema di Carnot), che permette, insieme al teorema dei seni, di **risolvere un triangolo qualsiasi**.

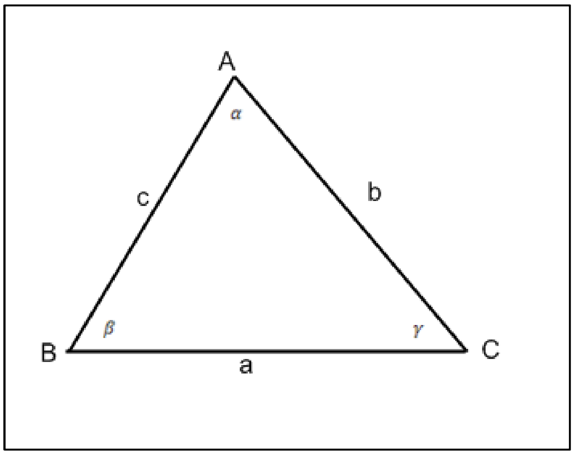
Dimostreremo il teorema nei due casi di triangolo acutangolo e ottusangolo e mostreremo come esso possa essere considerato una generalizzazione del teorema di Pitagora.

Faremo, infine, un esempio di applicazione.

Introduzione

Per risolvere un triangolo qualsiasi, abbiamo bisogno del teorema dei seni e del teorema del coseno (detto anche di Carnot), che presenteremo in questa dispensa.

Prima di tutto, con la seguente figura, richiamiamo brevemente la convenzione per la determinazione degli elementi di un triangolo adottata in trigonometria.



Teorema del coseno

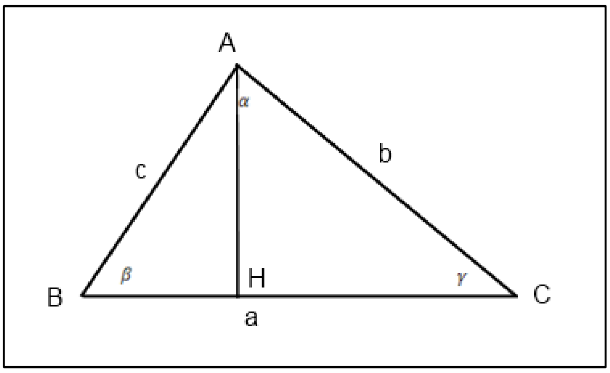
Dato un triangolo, siano a e b la misura di due suoi lati e sia γ l'angolo tra essi compreso: il quadrato del terzo lato è dato da

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Per dimostrare il teorema, distinguiamo i casi in cui γ sia acuto o ottuso.

Angolo acuto

Facendo riferimento alla seguente figura, supponiamo noti a, b e γ.



Considerando il triangolo ACH, rettangolo in H, abbiamo

$$CH = b\cos\gamma$$

Applicando il teorema di Pitagora

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 = b^2 - b^2cos^2\gamma$$

Considerando ora il triangolo ABH, rettangolo in H

$$BH = BC - CH = a - b\cos\gamma$$

Applicando il teorema di Pitagora

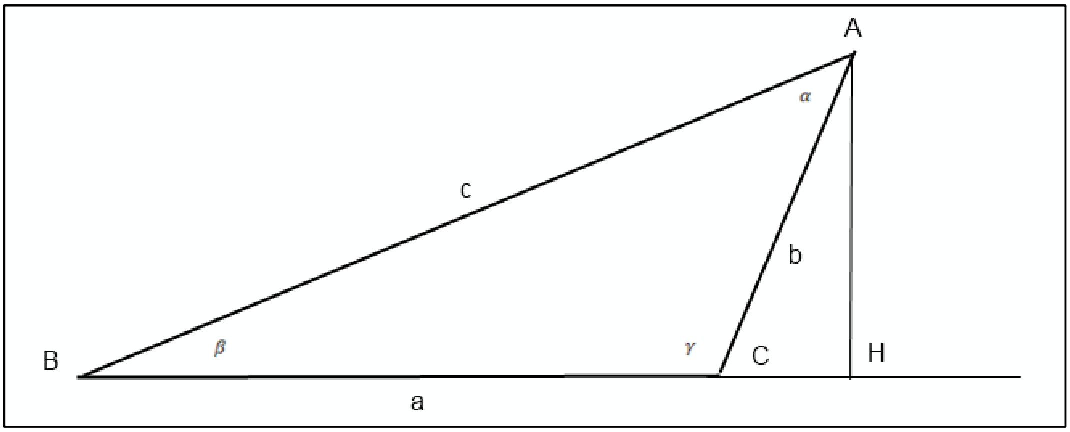
$$\begin{aligned}&AB^2 = c^2 = AH^2 + BH^2 = b^2 + b^2cos^2\gamma + (a - b\cos\gamma)^2 = \\ &b^2 - \ b^2cos^2\gamma + a^2 + b^2cos^2\gamma - 2ab\cos\gamma = \\ &a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\end{aligned}$$

In conclusione

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Angolo ottuso

Facendo riferimento alla seguente figura, supponiamo noti a, b e γ (stavolta ottuso).



Considerando il triangolo ACH, rettangolo in H, osserviamo che l'angolo (acuto) in C è il supplementare di γ, quindi è pari a $\pi - \gamma$ (in radianti); ricordando poi le formule relative agli angoli associati, abbiamo che $\cos\pi - \gamma = -\cos\gamma$.

Per la misura di CH abbiamo quindi

$$CH = -b\cos\gamma$$

Applicando il teorema di Pitagora

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 = b^2 + b^2cos^2\gamma$$

Considerando ora il triangolo AHB, rettangolo in H, abbiamo

$$BH = BC + CH = a - b\cos\gamma$$

Applicando il teorema di Pitagora

$$AB^2 = c^2 = AH^2 + BH^2 = b^2 + b^2cos^2\gamma + (a - b\cos\gamma)^2 =$$

$$b^2 - b^2cos^2\gamma + a^2 + b^2cos^2\gamma - 2ab\cos\gamma =$$
$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Anche in questo caso abbiamo, infine

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Teorema di Pitagora generalizzato

Prima di mostrare un esempio di applicazione, esaminiamo il caso particolare in cui $\gamma = 90°$. Poiché è noto che il coseno di un angolo retto è nullo, in questo caso la formula diviene

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Questa non è altro che l'espressione del teorema di Pitagora al triangolo ABC che, avendo supposto $\gamma = 90°$, è rettangolo in C.

Per questo motivo, talvolta, il teorema del coseno viene spesso considerato come un teorema di Pitagora generalizzato.

Applicazioni

Nella risoluzione di un triangolo, il teorema del coseno permette, noti due lati e l'angolo tra essi compreso, di determinare il terzo lato, infatti, estraendo la radice quadrata di entrambi i membri dell'espressione ricavata, si ha:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

Di questo vediamo ora un'applicazione.

Due lati di un triangolo misurano $a = 3m$ e $b = 2.5m$ e l'angolo tra essi compreso è $\gamma = 52°$. Determinare il terzo lato c.

Applicando il teorema di Carnot, supponendo le lunghezze espresse in metri, abbiamo

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} =$$
$$\sqrt{3^2 + 2.5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2.5 \cdot \cos 52°} =$$
$$\sqrt{9 + 6.25 - 9.23} = 2.45$$

Se vogliamo risolvere completamente il triangolo, dobbiamo determinare le ampiezze dei due angoli e ciò può essere fatto applicando il teorema dei seni.