Risoluzione dei triangoli rettangoli

In questa dispensa esamineremo il problema della risoluzione dei triangoli rettangoli.

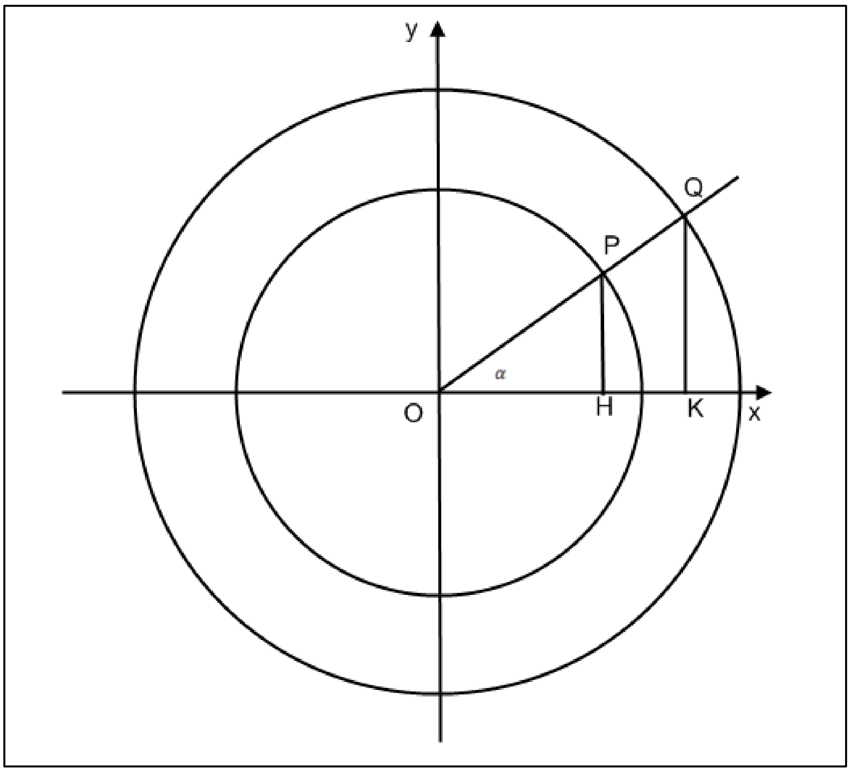
Riprendendo la definizione di seno e coseno, mostreremo come questi si possano esprimere in modo alternativo (ed equivalente) nel caso degli angoli acuti di un triangolo rettangolo e da queste espressioni ricaveremo le formule necessarie per risolvere i triangoli rettangoli.

Completano la dispensa alcuni esercizi svolti.

Introduzione

Dato un angolo α minore di 90°, disposto su un piano cartesiano, con una circonferenza goniometrica disegnata, con il vertice in O e il primo lato sul semiasse positivo delle ascisse, detto P il punto di intersezione del secondo lato dell'angolo con la circonferenza goniometrica, è noto che l'ascissa di P è il coseno dell'angolo dato, mentre l'ordinata è il seno.

Consideriamo ora, oltre alla circonferenza goniometrica che, per definizione, ha raggio unitario, una seconda circonferenza, ad essa concentrica, con raggio generico r: chiamiamo Q il punto di intersezione con tale circonferenza del secondo lato dell'angolo; indichiamo, poi, con H e K le proiezioni sull'asse delle ascisse, rispettivamente, di P e Q (vedi figura).



I triangoli OPH e OQH (rettangoli in H e K rispettivamente) sono simili, pertanto si ha

$$\frac{OH}{OP} = \frac{OK}{OQ}$$

e anche

$$\frac{PH}{OP} = \frac{QH}{OQ}$$

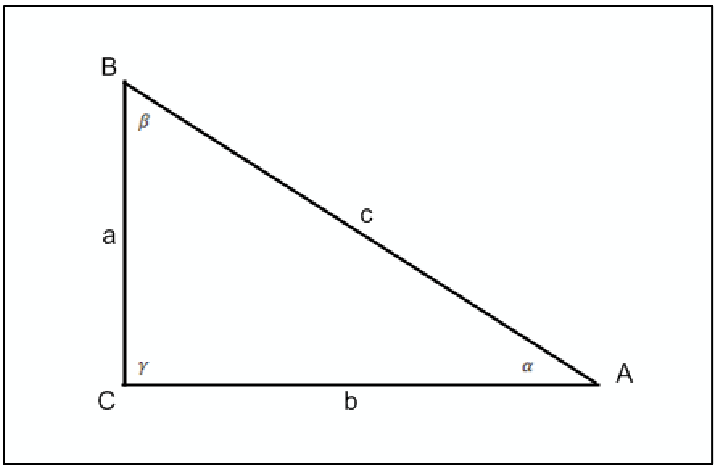
Osservando che OH è l'ascissa del punto P, quindi pari a $cos\alpha$, e PH è l'ordinata del punto Q, quindi pari a $sin\alpha$, e ricordando che $OP = 1$, le precedenti formule diventano:

$$cos\alpha = \frac{OK}{OQ}$$

$$sin\alpha = \frac{QK}{OQ}$$

Poiché non abbiamo fatto alcuna ipotesi sull'angolo α e sul raggio della seconda circonferenza, il risultato ottenuto per il triangolo rettangolo OKQ vale per qualunque triangolo rettangolo, in particolare:

Dato un triangolo rettangolo, detto α uno dei suoi angoli acuti, $sin\alpha$ è dato dal rapporto tra il cateto opposto ad α e l'ipotenusa, mentre $cos\alpha$ è dato dal rapporto tra il cateto adiacente e l'ipotenusa.



Usando la convenzione, largamente diffusa in trigonometria, di indicare con α, β e γ i tre angoli di un triangolo e, rispettivamente, con a, b e c le misure dei lati ad essi opposti, come indicato in figura, si ha:

$$sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Dividendo membro a membro le due uguaglianze, si ha:

$$\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\frac{cos\alpha}{sin\alpha} = ctg\alpha = \frac{b}{a}$$

Dato un triangolo rettangolo, detto α uno dei suoi angoli acuti, $tg\alpha$ è dato dal rapporto tra il cateto opposto ad α e il cateto adiacente, mentre $ctg\alpha$ è dato dal rapporto tra il cateto adiacente e il cateto opposto.

Risoluzione dei triangolo rettangoli

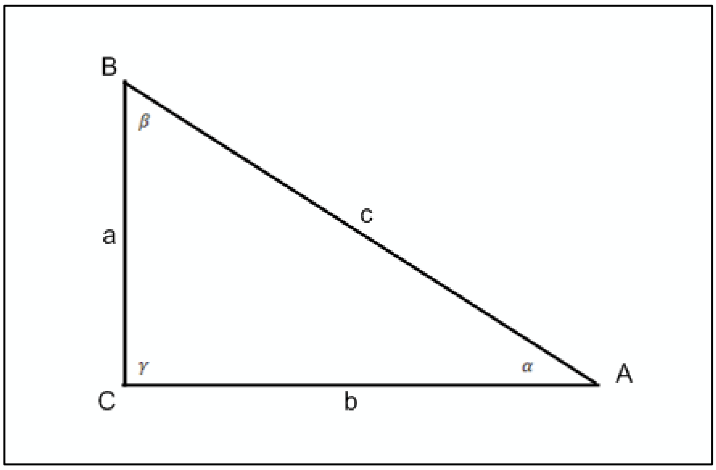
Dalle proprietà ricavate nel paragrafo precedente, possiamo ricavare le formule che ci permettono di risolvere un triangolo rettangolo, cioè di determinarne tutti gli elementi (lati e angoli) una volta noti, oltre all'angolo retto, due di essi, che non siano tutti e due angoli.

Con riferimento alla figura precedente, abbiamo già dimostrato che $sin\alpha = \frac{a}{c}$, $cos\alpha = \frac{b}{c}$, $tg\alpha = \frac{a}{b}$ e $ctg\alpha = \frac{b}{a}$; invertendo tali formule si ottengono immediatamente le seguenti proprietà fondamentali.

In un triangolo rettangolo, la misura di un cateto è pari alla misura dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto, o per il coseno dell'angolo adiacente.

In un triangolo rettangolo, la misura di un cateto è pari alla misura dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al cateto, o per la cotangente dell'angolo adiacente.

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti per affrontare il problema della risoluzione dei triangoli rettangoli. Nei seguenti sottoparagrafi affronteremo tutti i casi che si possono verificare e faremo sempre riferimento alla figura che, per comodità, riportiamo.



Sono noti α e c

In tal caso si ha

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$a = c \cdot sin\alpha$$

$$b = c \cdot cos\alpha$$

Sono noti a e α

In tal caso si ha:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$b = a \cdot tg\beta$$

L'ipotenusa c si può ricavare con il teorema di Pitagora, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, oppure ricorrendo, ancora una volta, alle funzioni goniometriche, $c = \frac{a}{sin\alpha}$.

Sono noti c ed a

In tal caso abbiamo

$$sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Noto il seno di α, l'ampiezza dell'angolo si ricava applicando la funzione inversa del seno (arcoseno, indicata, sulle calcolatrici, anche con sin^{-1}.

Avvertenza: usiamo l'espressione sin^{-1} per indicare la funzione inversa del seno poiché così è indicata, di solito, sulle calcolatrici scientifiche; bisogna però prestare attenzione a non confondere $sin^{-1}x$ con $(sinx)^{-1}$, pari, quest'ultima, a $\frac{1}{sinx}$.

Noto α, abbiamo

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Resta da determinare b, che può essere calcolato sia con il teorema di Pitagora, che ricorrendo a una delle formule trigonometriche viste, ad esempio

$$b = c \cdot sin\beta$$

Sono noti a e b

In tal caso si può ricavare l'ipotenusa c tramite il teorema di Pitagora e poi, analogamente a quanto abbiamo visto prima, il seno di uno dei due angoli acuti e l'angolo stesso tramite la funzione inversa del seno. Il complementare dell'angolo trovato è l'altro angolo acuto.

Esempi

Negli esempi che seguono, faremo ancora riferimento alla nomenclatura dei lati e degli angoli introdotta nella figura precedente.

Risolvere il triangolo rettangolo sapendo che $\alpha = 63°$ e $c = 4$.

Intanto abbiamo che $\beta = 90° - 63° = 27°$.

Poi si ha che $a = c \cdot sin63° = 4 \cdot 0.89 = 3.56$ e $b = c \cdot cos63° = 4 \cdot 0.45 = 1.8$.

Risolvere il triangolo rettangolo sapendo che $b = 6$ e $\alpha = 20°$.

Cominciamo con il calcolare l'altro cateto: $a = b \cdot tg\alpha = 6 \cdot tg20° = 6 \cdot 0.36 = 2.16$.

L'altro angolo acuto è $\beta = 90° - \alpha = 90° - 20° = 70°$.

Infine, per il calcolo dell'ipotenusa possiamo usare il teorema di Pitagora, o ricorrere ancora alla trigonometria:

$$c = \frac{a}{sin\alpha} = \frac{2.16}{0.34} = 6.35$$

Risolvere il triangolo rettangolo sapendo che $a = 2.5$ e $c = 4$.

Per determinare i due angoli, osserviamo che

$$sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{2.5}{4} = 0.625$$

Per trovare l'angolo dato il suo seno, bisogna applicare la funzione inversa del seno:

$$\alpha = sin^{-1}0.625 = 38.7°$$

A questo punto si ricava immediatamente $\beta = 90° - \alpha = 51.3°$ e $b = c \cdot cos\alpha = 3.12$.