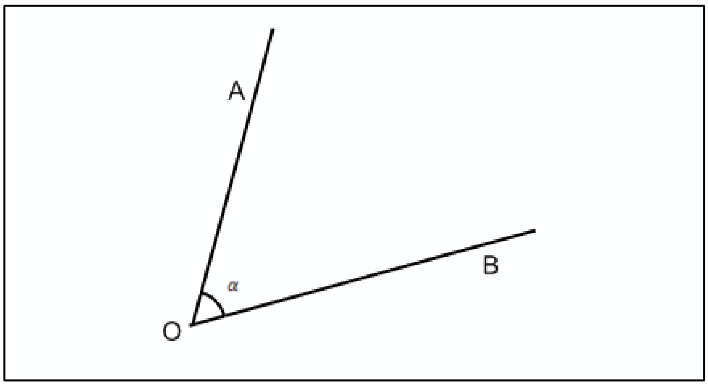
La misura degli angoli

In questa dispensa introduciamo la misura degli angoli, sia in gradi che in radianti, e le formule di conversione.

Per quanto riguarda l'introduzione del radiante, per facilitarne la comprensione, si comincia con la conversione da gradi a radianti e viceversa e solo in un secondo momento si passa alla definizione rigorosa.

Introduzione alla misura degli angoli

Ricordiamo che, dati due angoli, questi possono essere confrontati e si può stabilire se il primo è maggiore, uguale o minore del secondo. Se due angoli sono uguali, si dice che hanno la stessa ampiezza: questa viene normalmente indicata con una lettera minuscola dell'alfabeto greco. In figura vediamo l'angolo $\widehat{AOB}$, di ampiezza α.



Per misurare l'ampiezza di un angolo, come per altre grandezze fisiche, si deve scegliere una unità di misura (cioè un angolo la cui ampiezza è per convenzione pari ad 1). Intuitivamente, la misura di un angolo, rispetto ad una certa unità, è il numero di volte che l'angolo di ampiezza unitaria entra nell'angolo dato.

Anche se i concetti di angolo, ampiezza dell'angolo e misura dell'ampiezza dell'angolo sono distinti, vengono spesso usati in modo interscambiabile, allo scopo di non appesantire il discorso, anche se a scapito del rigore. Useremo, pertanto, espressioni come "angolo di 30°", o "angolo di ampiezza 30°", in luogo dell'espressione (più precisa) "angolo la cui ampiezza misura 30°".

Il grado sessagesimale

La più diffusa unità di misura dell'ampiezza degli angoli è il grado sessagesimale, detto semplicemente grado.

Si dice **grado sessagesimale** la misura dell'ampiezza di un angolo che è la 360-esima parte di un angolo giro.

Come è ben noto, il simbolo usato per il grado (sessagesimale) è il °.

Con la convenzione usata, abbiamo che un angolo retto misura 90°, un angolo piatto 180° e un angolo giro 360°.

Sottomultipli del grado

I sottomultipli del grado usati nella pratica (soprattutto in astronomia, topografia e geografia) sono il minuto primo (detto semplicemente minuto) e il minuto secondo, detto semplicemente secondo.

Si dice **minuto primo** la sessantesima parte di un grado; si dice **minuto secondo** la sessantesima parte di un minuto primo.

Il minuto si indica con un apice ‘, mentre il secondo con due apici ‘’: ad esempio, 34°23’54’’ indica una misura di 34 gradi, 23 minuti e 54 secondi.

Osserviamo esplicitamente che, dalla definizione data, un grado è pari a 60 minuti e un minuto è pari a 60 secondi.

Spesso, in luogo di minuti e secondi, le frazioni di grado vengono anche rappresentate in forma decimale: ad esempio, l’ampiezza 22°30’ (cioè 22 gradi e mezzo, essendo 30 minuti pari a mezzo grado) si può anche scrivere come 22.5°.

Per passare dalla forma in gradi, minuti e secondi alla forma decimale, è sufficiente ricordare che un minuto è pari a $\frac{1}{60}$ di grado, mentre un secondo è $\frac{1}{60}$ di minuto e, anche, $\frac{1}{3600}$ di grado.

Convertiamo in forma decimale 11°23’: moltiplicando 23 per $\frac{1}{60}$ otteniamo la frazione di grado a cui corrispondono 23 primi, cioè, banalmente, la parte dopo la virgola nell’espressione in forma decimale; essendo, quindi

$$23 \cdot \frac{1}{60} = 0.383$$

si ha 11°23’=11.383°.

Convertiamo ora 24°31’27’’. In questo caso abbiamo sia minuti che secondi: la frazione di grado rappresentata da 31’27’’ si ottiene moltiplicando 31 per $\frac{1}{60}$, 27 per $\frac{1}{3600}$ e poi sommando i risultati ottenuti, cioè

$$31 \cdot \frac{1}{60} + 27 \cdot \frac{1}{3600} = 0.525$$

In definitiva 24°31’27’’=24.525°.

La misura in radianti

In matematica, oltre al grado, si utilizza anche un’altra unità di misura per gli angoli, che è il **radiante**.

Rimandando al prossimo sottoparagrafo la definizione rigorosa, per ora definiamo il radiante (indicato con *rad*) come l’unità di misura tale che l’angolo piatto ha ampiezza di π *rad*, cioè circa 3.14 *rad*.

Per passare dalla misura in gradi alla misura in radianti di un angolo, basta a questo punto una semplice proporzione; in particolare, indicando con α la misura in radianti e con $\alpha°$ quella in gradi di uno stesso angolo, si ha:

$$180 : \pi = \alpha° : \alpha$$

Di conseguenza, data la misura in gradi, per passare a quella in radianti si usa la formula

$$\alpha = \alpha° \cdot \frac{\pi}{180} rad$$

Per passare ai gradi, data la misura in radianti, la formula, inversa della precedente, è

$$\alpha° = \alpha \cdot \frac{180°}{\pi}$$

Facciamo qualche esempio di conversione. Dato l'angolo $\alpha = 1.5\ rad$, l'equivalente in gradi è

$$\alpha° = 1.5 \cdot \frac{180}{\pi} \cong 86°$$

Dato l'angolo $\alpha° = 21°$, l'equivalente in radianti è

$$\alpha = 21 \cdot \frac{\pi}{180} rad = 0.37\ rad$$

Definizione di radiante

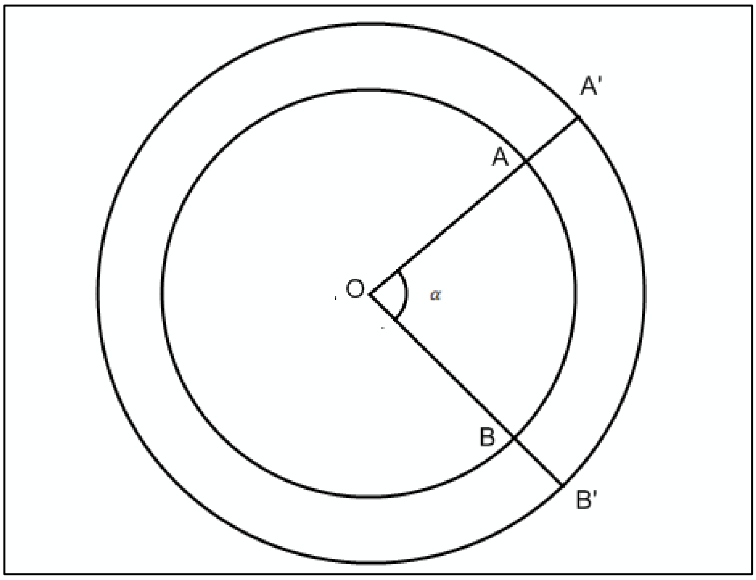
Data una circonferenza di raggio r e un angolo al centro α, che insiste su un arco AB, il rapporto tra la lunghezza di AB ed r è detto **misura in radianti** di α.

A prima vista, può sembrare che la misura di α in radianti dipenda dal raggio della circonferenza, ma in realtà ora dimostreremo che non è così e che essa dipende solo dall'ampiezza dell'angolo, come deve essere affinché la definizione sia ben posta.

Innanzitutto ricordiamo che, per un noto risultato della geometria piana, la lunghezza di un arco di circonferenza, di raggio r, su cui insiste un angolo α, **espresso in gradi**, è data da:

$$l = \frac{\pi r}{180} \alpha$$

Consideriamo ora due circonferenze di raggi r e r' distinti, che, per comodità, disegniamo concentriche. Sia α un angolo al centro di entrambe le circonferenze e siano AB e A'B' gli archi (uno per ciascuna circonferenza) su cui insiste (vedi figura).



Indicando con l ed l' le lunghezze, rispettivamente di AB e A'B', si ha:

$$l = \frac{\pi r}{180}\alpha$$

$$l' = \frac{\pi r'}{180}\alpha$$

Esplicitando il rapporto tra lunghezza dell'arco e raggio per entrambe le circonferenze, si ha

$$\frac{l}{r} = \frac{l'}{r'} = \frac{\pi\alpha}{180}$$

Da questa espressione si vede chiaramente che tale rapporto non dipende dal raggio della circonferenza, ma solo dall'angolo al centro, come volevamo dimostrare.

Un'interessante proprietà, che deriva dalla definizione che abbiamo dato, e che talvolta è essa stessa utilizzata come definizione di radiante, è la seguente:

Un angolo al centro che misura un radiante è tale che insiste su un arco di circonferenza lungo quanto il raggio.

Angoli notevoli

Una convenzione che si adotta nella scrittura delle ampiezze in radianti è quella di lasciare indicato il fattore π, senza svolgere i calcoli; ad esempio, l'ampiezza di un angolo piatto è tipicamente indicata con π radianti e non 3.14 radianti.

Un'altra convenzione è quella di non indicare, quando si usano i radianti, l'unità di misura *rad*: questa convenzione è coerente con il fatto che abbiamo definito la misura in radianti come rapporto tra due lunghezze e, quindi, come un numero adimensionale.

Riportiamo ora, nella seguente tabella, il valore, sia in gradi che in radianti, di alcuni angoli notevoli, che è bene ricordare a memoria.

Gradi	0	30	45	60	90	180	270	360
Radianti	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π