

Funzioni goniometriche

In questa dispensa vengono introdotte le definizioni delle funzioni goniometriche.

Preliminarmente si introducono le convenzioni sull'orientazione degli angoli e sulla loro rappresentazione su un piano cartesiano.

Si definiscono le funzioni seno e coseno e si introduce la relazione fondamentale della trigonometria.

Si passa poi ad introdurre la tangente e la cotangente, delle quali si presentano due definizioni alternative ed equivalenti.

Copyright © 2010 – Paolo Caramanica – <http://www.trigonometria.org>

Questo documento è rilasciato sotto la licenza

Creative Commons 2.5 Italia by-nc-sa

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/it/>

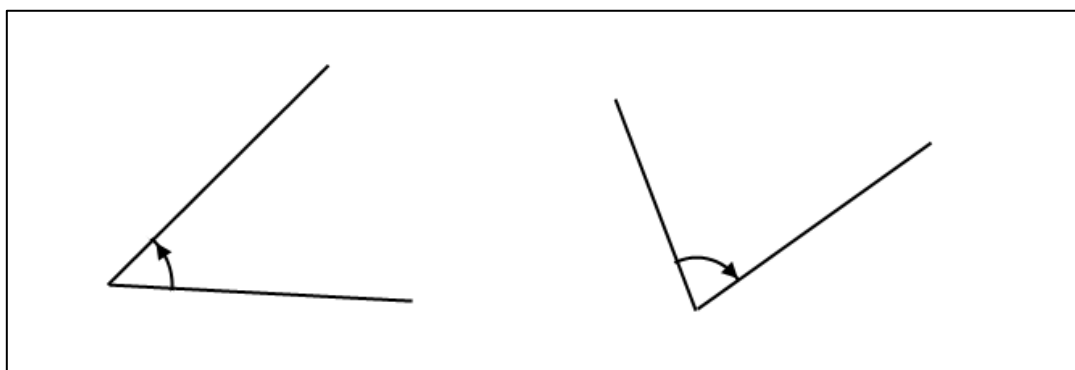
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/it/legalcode>

Angoli sul piano cartesiano

Un angolo può essere **orientato**, cioè si può stabilire, convenzionalmente, un ordine tra i due lati, ovvero quale dei due lati sia il primo e quale il secondo; fatto questo, risulta individuato anche un “verso di percorrenza” dal primo al secondo lato, che può essere orario o antiorario.

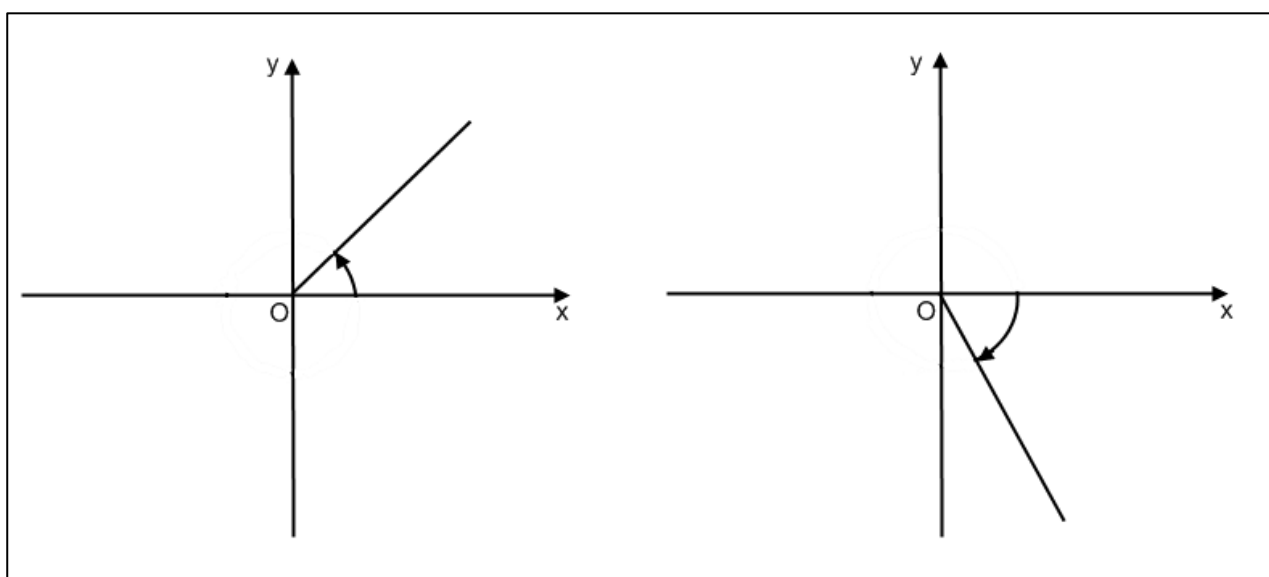
In matematica si considerano **positivi** gli angoli orientati in **verso antiorario**, **negativi** quelli in **verso orario**.

Nella figura seguente vediamo due esempi di angoli orientati, quello a sinistra positivamente, mentre quello a destra negativamente.

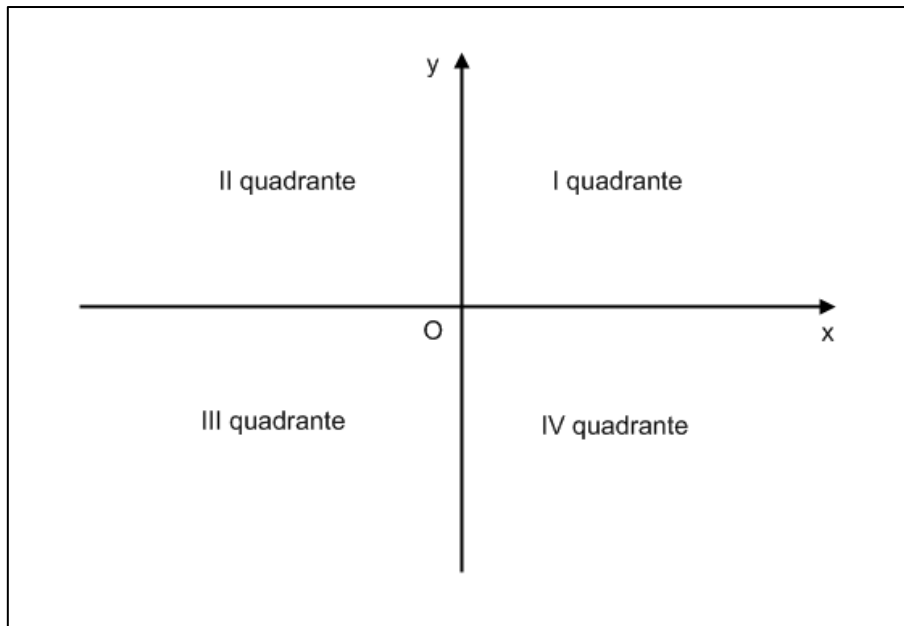


Per definire le funzioni goniometriche, è necessario disporre gli angoli su un piano cartesiano: in matematica si usa la convenzione di rappresentare un angolo ponendo il vertice nell'origine e il primo lato sul semiasse positivo delle ascisse.

Tenendo conto di ciò e delle convenzioni sull'orientazione, in figura vediamo come si rappresentano un angolo positivo di $\frac{\pi}{4}$ e uno (negativo) di $-\frac{\pi}{3}$.

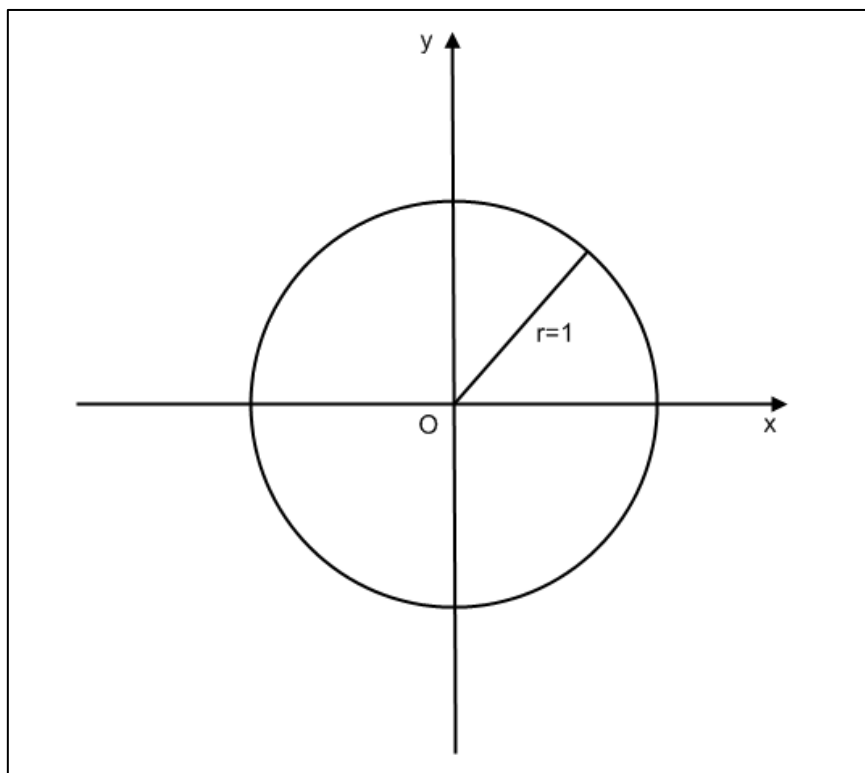


Ricordiamo anche che il piano viene diviso, per comodità, in quattro quadranti, come indicato nella seguente figura.



Circonferenza goniometrica

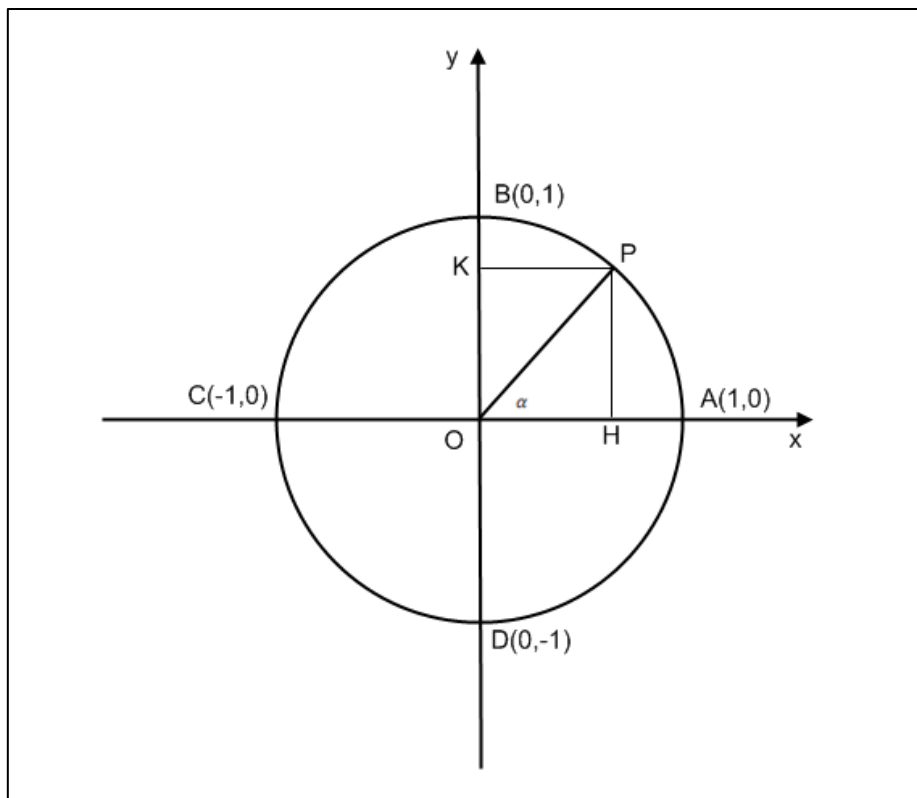
Si dice **circonferenza goniometrica** una circonferenza su un piano cartesiano con centro nell'origine e raggio pari ad 1 (vedi figura).



La funzione di essa sarà chiara nei prossimi paragrafi, nei quali daremo la definizioni delle funzioni goniometriche.

Seno e coseno di un angolo orientato

Dato un angolo orientato di ampiezza α , disposto, secondo le convenzioni viste, su un piano cartesiano su cui sia rappresentata una circonferenza goniometrica, indichiamo con P l'intersezione del secondo lato dell'angolo con la circonferenza stessa; chiamiamo poi H e K, rispettivamente, le proiezioni di P sull'asse delle ascisse e su quello delle ordinate (vedi figura).



Si dice **seno** dell'angolo l'ordinata del punto P, **coseno** dell'angolo l'ascissa di P.

Il seno di un angolo α si indica con la scrittura $\sin \alpha$, oppure $sen \alpha$, il coseno si indica con $\cos \alpha$.

Con riferimento alla stessa figura, consideriamo ora alcuni casi particolari:

- Se l'angolo è nullo, P coincide con A(1,0), pertanto $\sin 0 = 0$ e $\cos 0 = 1$.
- Se l'angolo è $\frac{\pi}{2}$ (retto), P coincide con B(0,1), pertanto $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ e $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.
- Se l'angolo è π (piatto), P coincide con C(-1,0), pertanto $\sin \pi = 0$ e $\cos \pi = -1$.
- Se l'angolo è $\frac{3\pi}{2}$, P coincide con D(0,-1), pertanto $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ e $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$.
- Se l'angolo è 2π (giro), P coincide con A(1,0) e per seno e coseno si hanno gli stessi valori che nell'angolo nullo.

Proprietà fondamentale della trigonometria

Consideriamo ora il triangolo OHP, rettangolo in H: la lunghezza di PH coincide, a meno del segno, con il seno di α , mentre la lunghezza di OH con il suo coseno (sempre a meno del segno).

Se applichiamo il teorema di Pitagora, si ha:

$$PH^2 + OH^2 = OP^2$$

Ricordando che $OP=1$, essendo il raggio della circonferenza goniometrica, si ha infine:

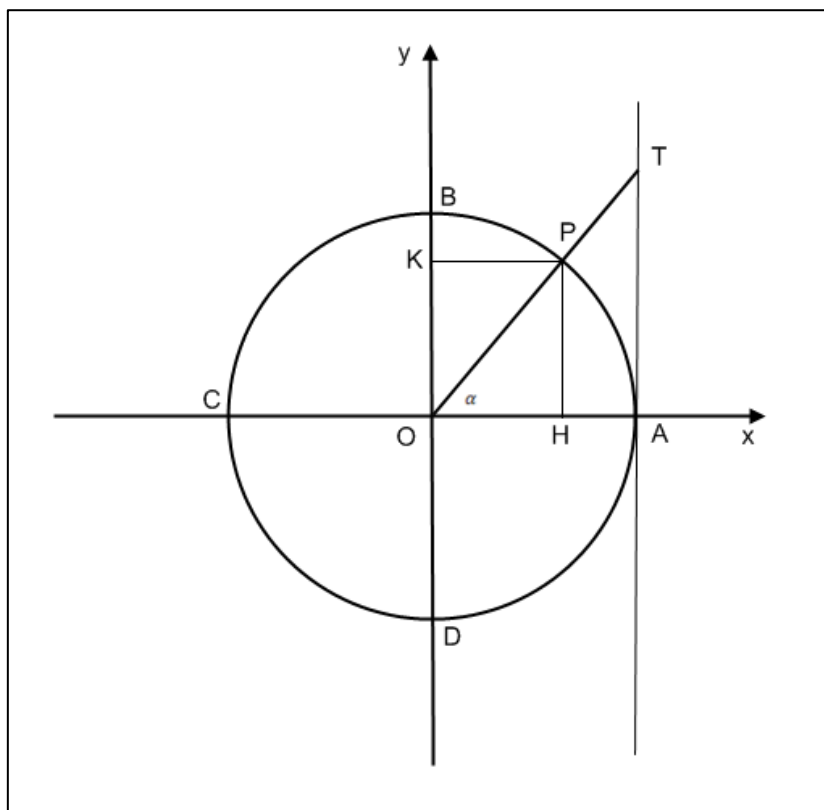
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Questa relazione, valida per qualunque angolo, prende il nome di **proprietà fondamentale della trigonometria**.

Tangente e cotangente di un angolo orientato

Definizione di tangente

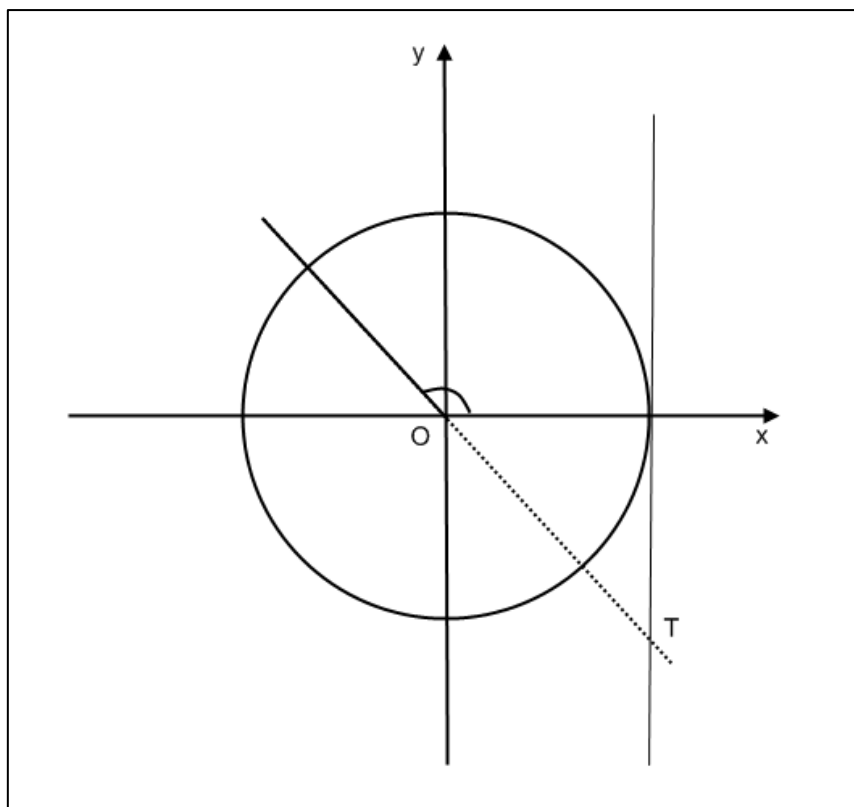
Dato un angolo orientato di ampiezza α , disposto sul piano cartesiano con circonferenza goniometrica come fatto finora, tracciamo la retta tangente alla circonferenza passante per A (vedi figura); indichiamo con T l'intersezione con tale retta del secondo lato dell'angolo o del suo prolungamento.



Con riferimento alla figura, si chiama **tangente** dell'angolo l'ordinata del punto T, se l'intersezione T esiste.

La tangente di α si indica con $\tan \alpha$ oppure con $tg \alpha$.

Nella figura seguente vediamo un esempio in cui il lato dell'angolo non interseca la retta, che invece è intersecata dal suo prolungamento (tratteggiato).



Nella definizione precedente è scritto “se T esiste”, infatti non è detto che il secondo lato dell'angolo o il suo prolungamento intersechino la retta: se consideriamo un angolo di $\frac{\pi}{2}$, il secondo lato dell'angolo e il suo prolungamento sono paralleli alla retta, e quindi non la intersecano. Una situazione analoga si ha per l'angolo di $\frac{3\pi}{2}$. In questi casi, la tangente non è definita.

La tangente degli angoli $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ non è definita, cioè non esiste.

Osserviamo anche che la tangente di 0 e π è nulla, come è facile verificare.

Ricaviamo ora una definizione alternativa per la tangente di un angolo. Nella prima figura del paragrafo, osserviamo che i triangoli OAT e OHP sono simili, pertanto possiamo scrivere:

$$\frac{AT}{OA} = \frac{PH}{OH}$$

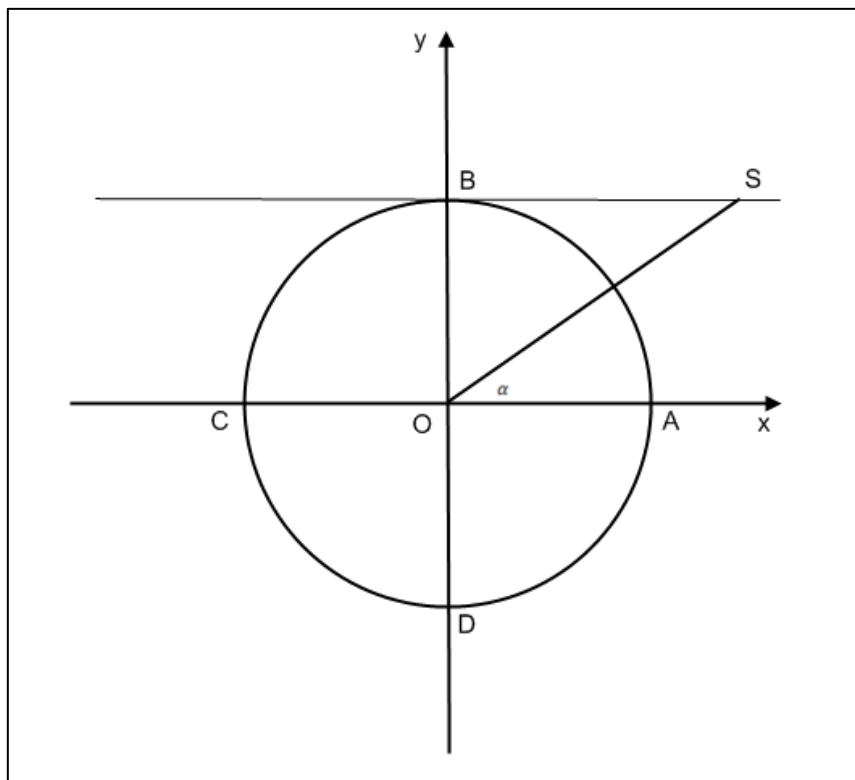
Osservando che $OA=1$ (essendo il raggio della circonferenza goniometrica), PH è il seno di α e OH il suo coseno, AT è la tangente di α , si ha:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

In effetti, alcuni autori definiscono direttamente la tangente di un angolo come il rapporto tra seno e coseno.

Definizione di cotangente

Dato un angolo orientato di ampiezza α , disposto sul piano cartesiano con circonferenza goniometrica, tracciamo la retta tangente alla circonferenza passante per B (vedi figura); indichiamo con S l'intersezione con tale retta del secondo lato dell'angolo o del suo prolungamento.



Con riferimento alla figura, si chiama cotangente dell'angolo l'ascissa del punto S, se questo punto esiste.

La cotangente di α si indica con $\cot \alpha$ oppure con $ctg \alpha$.

Nel caso di angolo nullo, piatto o giro, né il secondo lato dell'angolo, né il suo prolungamento intersecano la retta: in tal caso la cotangente non è definita.

La cotangente degli angoli 0 , π e 2π non è definita, cioè non esiste.

Osserviamo poi che la cotangente di $\frac{\pi}{2}$ e di $\frac{3\pi}{2}$ è nulla, come è facile verificare.

Analogamente a quanto fatto per la tangente, anche per la cotangente è possibile ricavare una definizione alternativa; in particolare, si può dimostrare che

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$