

Funzioni goniometriche di angoli notevoli

In questa dispensa calcoleremo il valore delle funzioni goniometriche per gli angoli notevoli di 30° , 45° e 60° .

Dopo aver richiamato il concetto di sezione aurea di un segmento, applicheremo le proprietà del decagono regolare nel calcolo delle funzioni goniometriche per l'angolo di 18° .

Copyright © 2010 – Paolo Caramanica – <http://www.trigonometria.org>

Questo documento è rilasciato sotto la licenza

Creative Commons 2.5 Italia by-nc-sa

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/it/>

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/it/legalcode>

Introduzione

Per poter affrontare i problemi di trigonometria, primo fra tutti quello della risoluzione dei triangoli, è necessario conoscere il valore delle funzioni goniometriche di un angolo qualsiasi, nota la sua ampiezza. Questo problema non si può risolvere in modo elementare, cioè non esistono formule che, dato un angolo qualsiasi, permettano di calcolarne il seno e le altre funzioni goniometriche.

Per valutare le funzioni goniometriche di un angolo, si ricorre a dei metodi di approssimazione, come lo sviluppo in serie di Taylor, che esulano dagli scopi di questa dispensa.

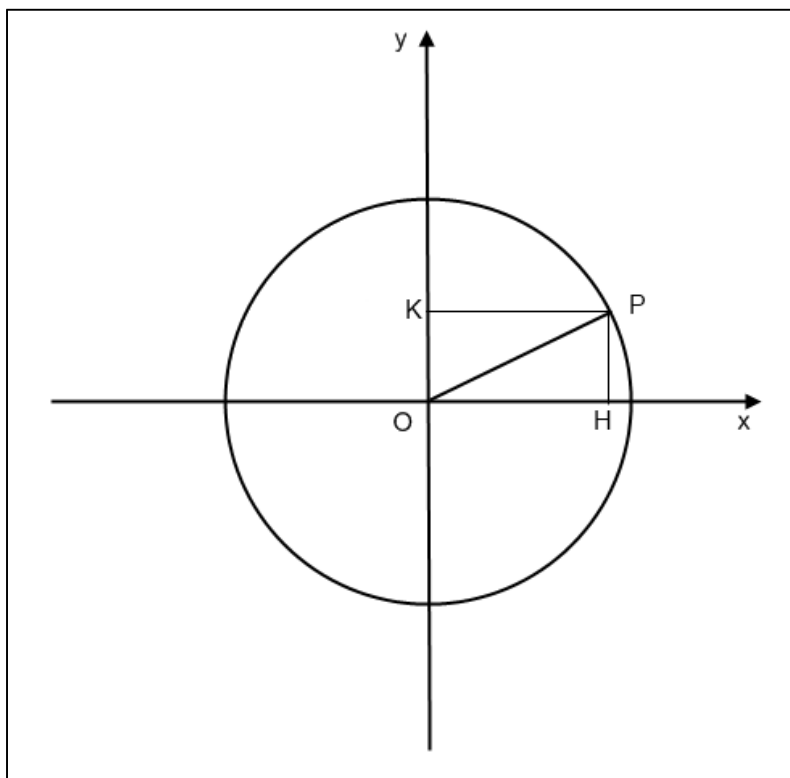
Esistono tuttavia degli angoli particolari (angoli notevoli) per i quali è facile valutare le funzioni goniometriche ricorrendo a delle considerazioni geometriche, cosa che faremo nei prossimi paragrafi.

Angoli di 30° , 45° e 60°

Per gli angoli di 30° , 45° e 60° , si può calcolare facilmente il valore delle funzioni goniometriche, tramite l'applicazione del teorema di Pitagora.

Angolo di 30°

Nella seguente figura vediamo rappresentato, secondo le convenzioni usuali, un angolo di 30° su un piano cartesiano con circonferenza goniometrica



Dette H e K le proiezioni di P rispettivamente sull'asse delle ascisse e delle ordinate, il triangolo OPH, rettangolo in H, ha l'angolo in O di 30° , per costruzione, quindi ha l'angolo in P di 60° : ne deriva che esso è metà triangolo equilatero di lato OP (che ha misura 1, essendo il raggio della circonferenza goniometrica).

Dall'applicazione del teorema di Pitagora al triangolo equilatero, segue immediatamente che

$$PH = OK = \frac{1}{2}$$

e che

$$OH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ricordando che il seno dell'angolo \widehat{POH} è l'ordinata di P e il coseno la sua ascissa, segue che

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

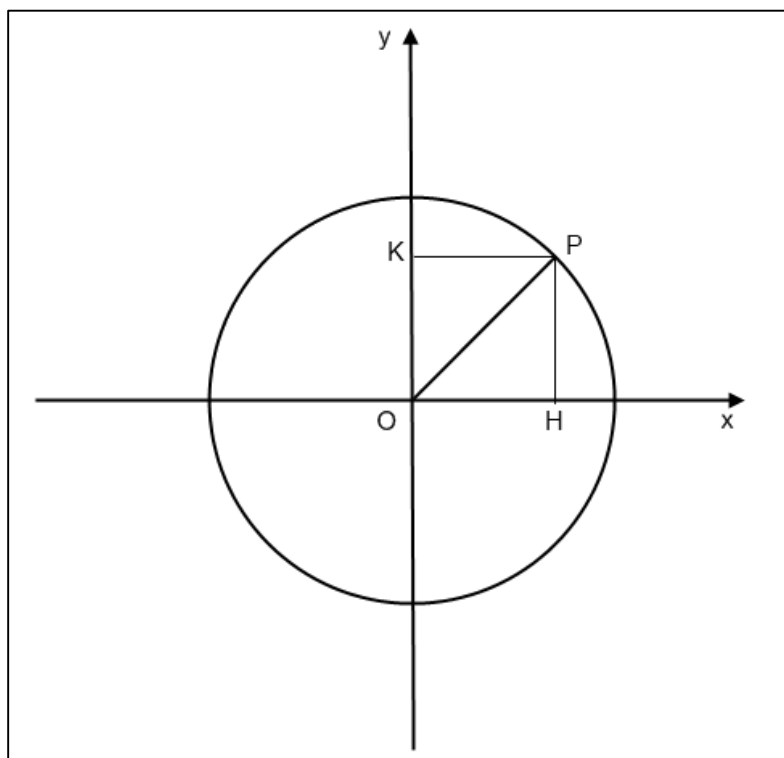
Per la tangente e la cotangente si ha:

$$tg 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$ctg 30^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \sqrt{3}$$

Angolo di 45°

Utilizzando la stessa simbologia, rappresentiamo nella figura seguente l'angolo di 45° su un piano cartesiano con circonferenza goniometrica.



Si riconosce che il quadrilatero OHPK è un quadrato, la cui diagonale è OP (di misura unitaria).

Dall'applicazione del teorema di Pitagora, nota la diagonale di un quadrato, possiamo calcolarne il lato, che in questo caso, essendo $OP = 1$, è pari a $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Di conseguenza, per il seno e il coseno si ha:

$$\sin 45^\circ = OK = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

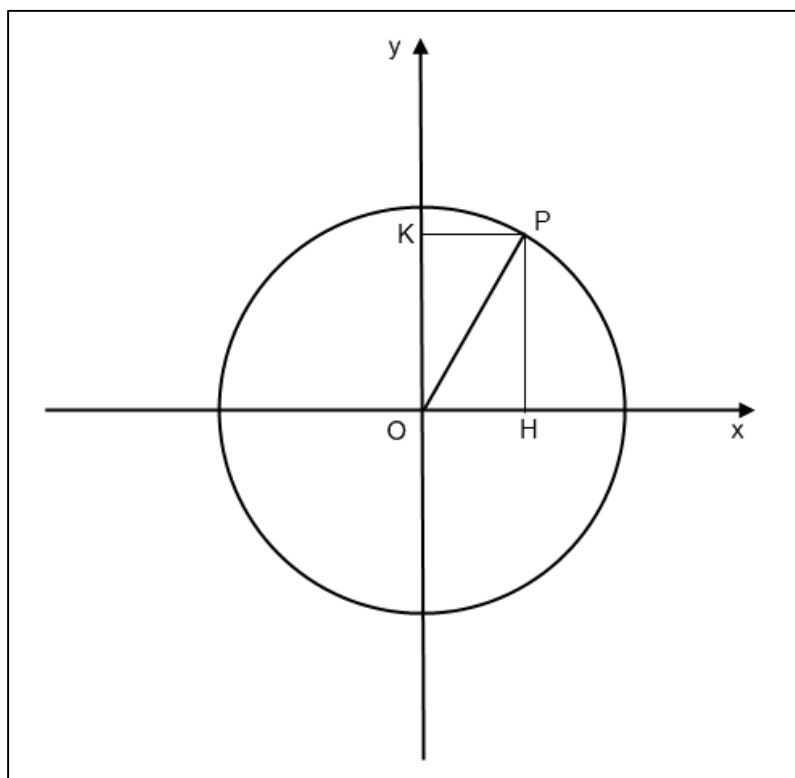
$$\cos 45^\circ = OH = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Per l'angolo di 45° , seno e coseno hanno lo stesso valore; ciò è valido anche per tangente e cotangente, come è facile verificare:

$$tg 45^\circ = ctg 45^\circ = 1$$

Angolo di 60°

Nella figura seguente vediamo rappresentato un angolo di 60° .



Analogamente al caso dell'angolo di 30° , il triangolo OPH è rettangolo in H ed è la metà di un triangolo equilatero di lato $OP = 1$; stavolta, però, l'altezza del triangolo equilatero è PH .

Applicando ancora una volta il teorema di Pitagora, si ha:

$$\sin 60^\circ = OK = PH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = OH = \frac{1}{2}$$

Per la tangente e la cotangente si ha:

$$tg 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$ctg 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Angolo di 18°

Anche per l'angolo di 18° è possibile esprimere in forma chiusa i valori delle funzioni goniometriche, ricorrendo a una proprietà del decagono regolare. Prima di tutto, però, è utile richiamare la definizione di sezione aurea di un segmento.

La sezione aurea di un segmento

Dato un segmento AB, sia C un suo punto interno, che lo divide quindi nei due segmenti AC e CB.

Si dice che AC è la sezione (o parte) aurea del segmento AB se il rapporto tra AC e CB è uguale al rapporto tra AB e AC.

Si dice anche che la parte aurea di un segmento è il medio proporzionale tra la parte restante del segmento e l'intero segmento, cioè vale la seguente proporzione:

$$\text{parte restante} : \text{parte aurea} = \text{parte aurea} : \text{intero segmento}$$

Dato un segmento di lunghezza l, per trovare la sua parte aurea, di lunghezza x, si deve quindi risolvere la seguente equazione:

$$\frac{l-x}{x} = \frac{x}{l}$$

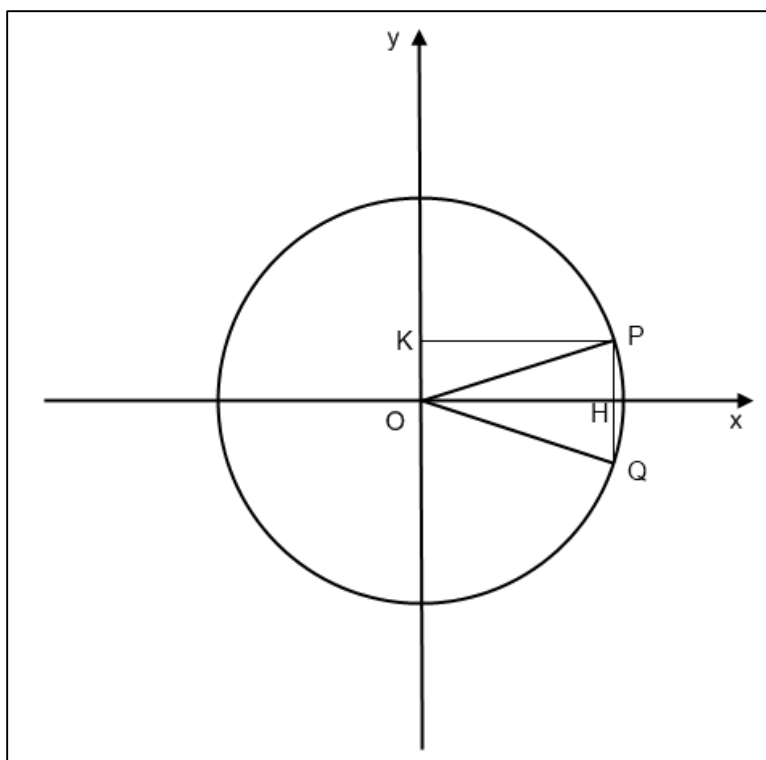
Questa equazione ammette una soluzione positiva e una negativa; essendo x la misura di un segmento, ovviamente solo la soluzione positiva è accettabile:

$$x = l \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Questa formula ci permette di trovare la sezione aurea di un segmento noto.

Funzioni goniometriche dell'angolo di 18°

Riportiamo, nella seguente figura, insieme all'angolo $\widehat{HOP} = 18^\circ$, anche il suo opposto $\widehat{HOQ} = -18^\circ$.



L'angolo \widehat{POQ} è di 36° , cioè la decima parte di un angolo giro, quindi PQ è il lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza goniometrica.

Si può dimostrare che il lato di un decagono regolare, inscritto in una circonferenza, è la sezione aurea del raggio della circonferenza stessa.

In questo caso, quindi, PQ è la sezione aurea di OP, che è di misura unitaria; applicando la formula ricavata nel paragrafo precedente, si ha:

$$PQ = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Essendo $PH = \frac{PQ}{2}$, segue immediatamente che

$$\sin 18^\circ = PH = OK = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo PHO, possiamo ricavare

$$\cos 18^\circ = OH = \sqrt{OP^2 - PH^2} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

Noti seno e coseno, si possono infine ricavare tangente e cotangente:

$$tg 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

$$ctg 18^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5} - 1}$$