Andamento e periodo delle funzioni goniometriche

In questa dispensa ricaviamo gli andamenti delle funzioni goniometriche seno, coseno, tangente e cotangente tra 0 e 360°, detti, rispettivamente, sinusoide, cosinusoide, tangentoide e cotangentoide.

Dopo aver chiarito che cosa si intende per angolo maggiore di un angolo giro e aver richiamato la definizione di funzione periodica, mostreremo che il seno e il coseno sono periodiche di periodo 360°, mentre tangente e cotangente di 180°.

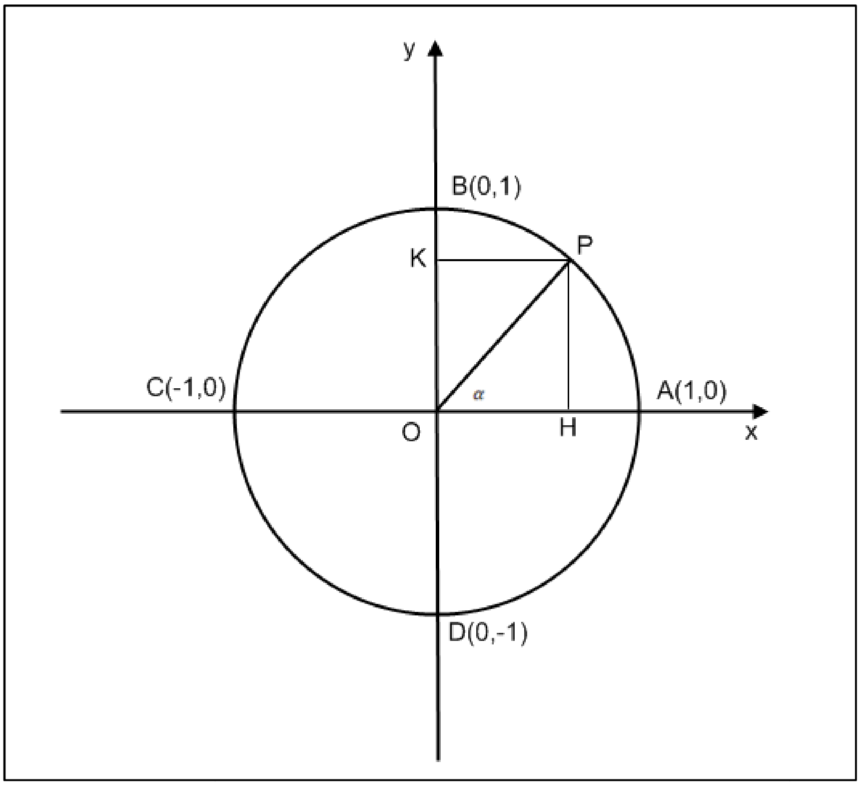
Introduzione

In questa dispensa esamineremo l'andamento (con i relativi grafici) delle funzioni goniometriche: cominceremo con gli angoli compresi tra 0 e 360°, successivamente vedremo che cosa si intende per angolo con ampiezza maggiore di un angolo giro e, infine, valuteremo la periodicità delle funzioni goniometriche.

Andamento delle funzioni goniometriche

Andamento del seno

Cominciamo a considerare l'andamento della funzione seno quando l'angolo varia tra 0 e 2π. Con riferimento alla seguente figura, nella quale è riportato l'angolo su un piano dotato di circonferenza goniometrica, il seno è dato dall'ordinata del punto P.



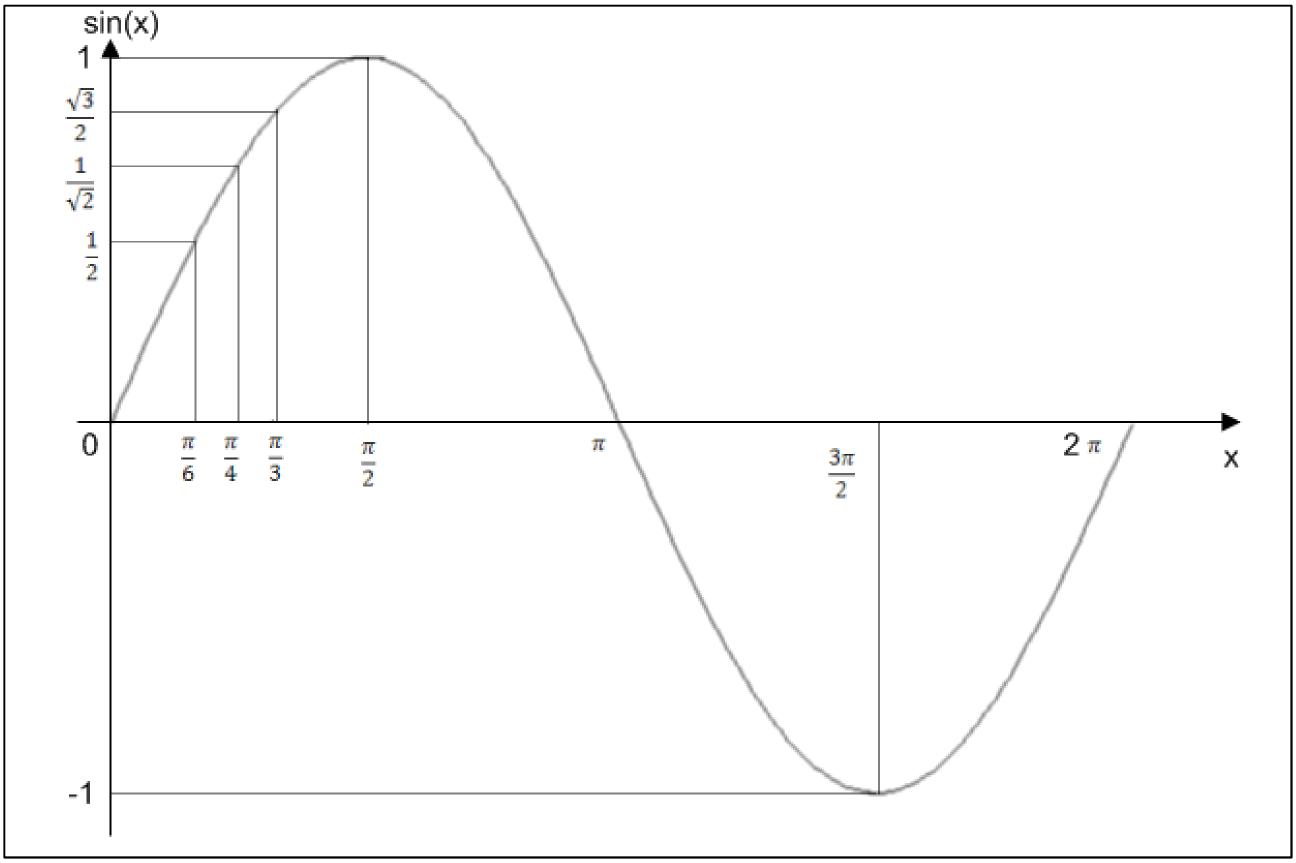
Per $\alpha = 0$, l'ordinata di P è nulla, mentre per α che va da 0 a $\frac{\pi}{2}$ cresce, fino ad arrivare ad 1 (in corrispondenza di B), pertanto il seno di α va da 0 a 1.

Per α che va da $\frac{\pi}{2}$ a π, il punto P è nel secondo quadrante e la sua ordinata decresce da 1 (in corrispondenza di B) a 0, (in corrispondenza di C), pertanto il seno di α va da 1 a 0.

Per α che varia tra π e $\frac{3\pi}{2}$, l'ordinata del punto P varia tra 0 (in corrispondenza di C) e -1 (in corrispondenza di D), pertanto il seno di α va da 0 a -1.

Per α che varia tra $\frac{3\pi}{2}$ e 2π, l'ordinata del punto P varia tra -1 (in corrispondenza di D) e 0 (in corrispondenza di A), pertanto il seno di α va da -1 a 0.

Sulla base di queste considerazioni, possiamo disegnare il grafico del seno (detto **sinusoide**) di un angolo x che varia tra 0 e 2π, mostrato nella seguente figura (nella quale sono riportati anche alcuni valori notevoli).



Andamento del coseno

Per ricavare l'andamento del coseno di un angolo tra 0 e 2π, procediamo in modo analogo a quanto fatto per il seno: con riferimento alla figura nella pagina precedente, il coseno di α è l'ascissa del punto P.

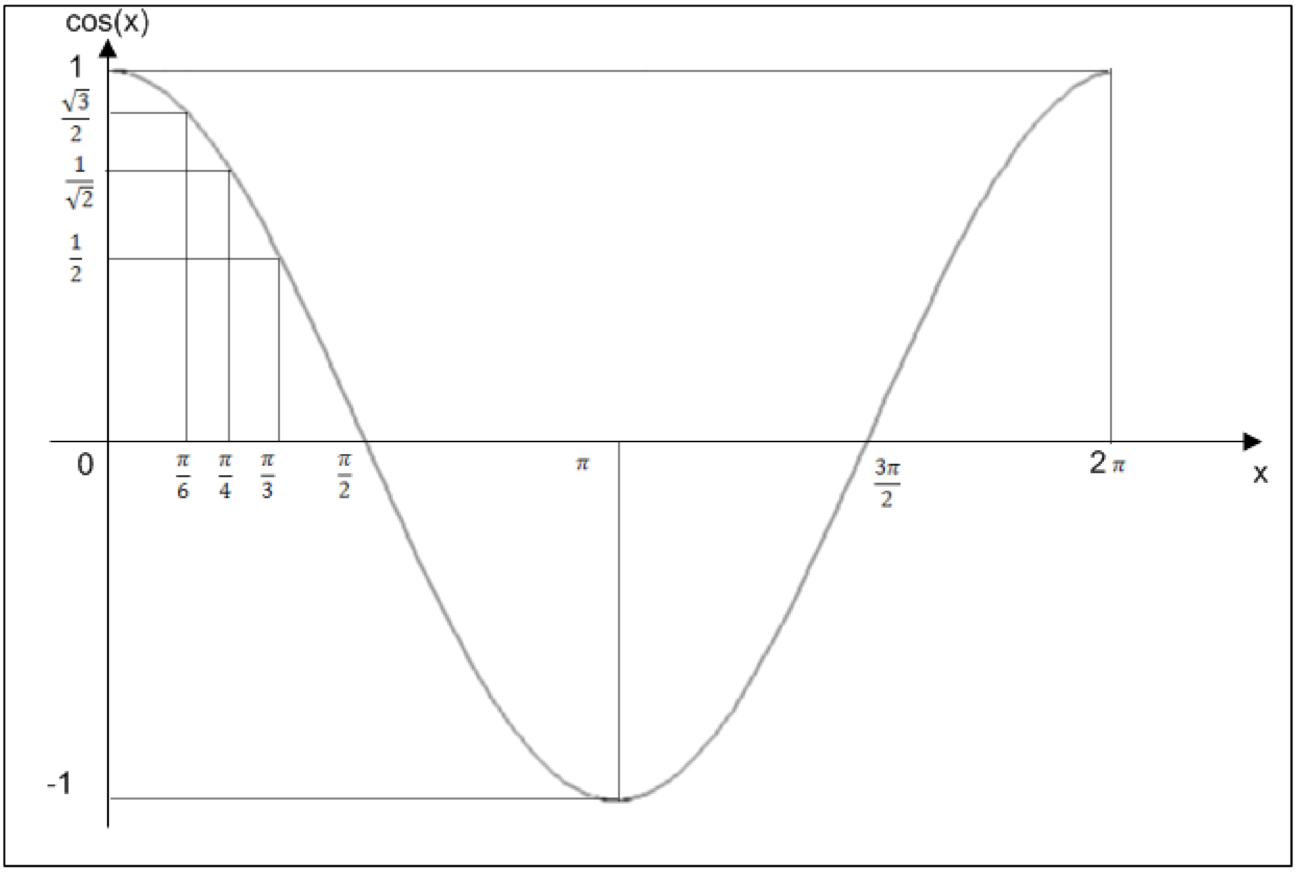
Per $\alpha = 0$, l'ascissa di P è 1, mentre per α che va da 0 a $\frac{\pi}{2}$ decresce, fino ad arrivare a 0 (in corrispondenza di B), pertanto il coseno di α va da 1 a 0.

Per α che va da $\frac{\pi}{2}$ a π, il punto P è nel secondo quadrante e la sua ascissa decresce da 0 (in corrispondenza di B) a -1, (in corrispondenza di C), pertanto il coseno di α va da 0 a -1.

Per α che varia tra π e $\frac{3\pi}{2}$, l'ascissa del punto P varia tra -1 (in corrispondenza di C) e 0 (in corrispondenza di D), pertanto il coseno di α va da -1 e 0.

Per α che varia tra $\frac{3\pi}{2}$ e 2π, l'ascissa del punto P varia tra 0 (in corrispondenza di D) e 1 (in corrispondenza di A), pertanto il coseno di α va da 0 a 1.

Sulla base di queste considerazioni, possiamo disegnare il grafico del coseno (detto **cosinusoide**) di un angolo x compreso tra 0 e 2π, mostrato di seguito.



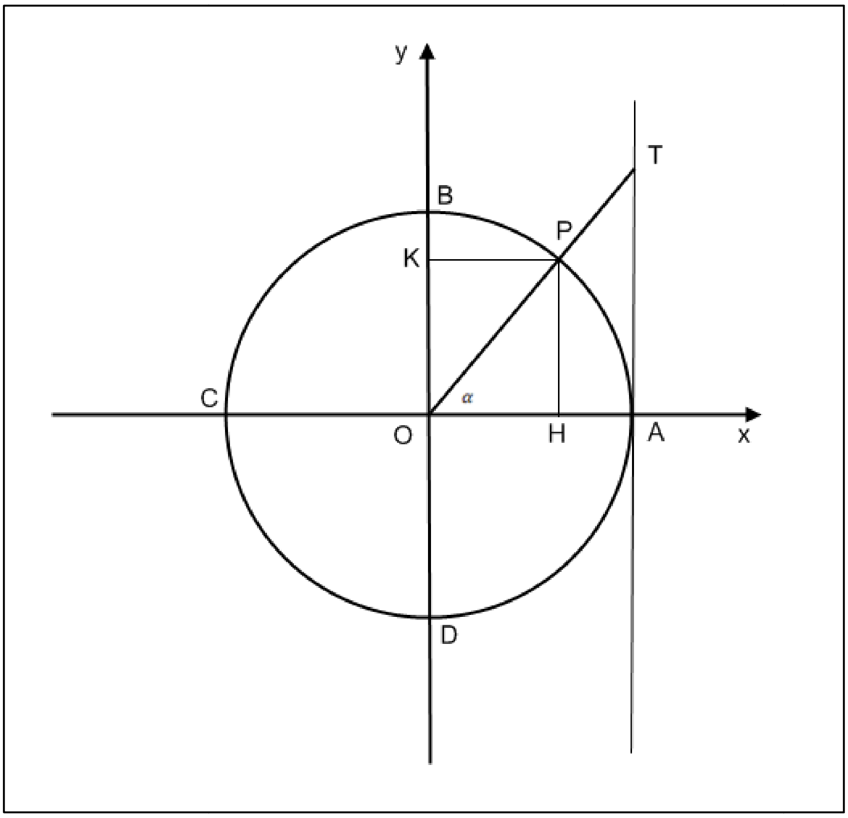
Andamento della tangente

Per ricavare l'andamento della tangente di un angolo tra 0 e 2π, facciamo riferimento alla figura della pagina seguente, nella quale la tangente di α è l'ordinata del punto T.

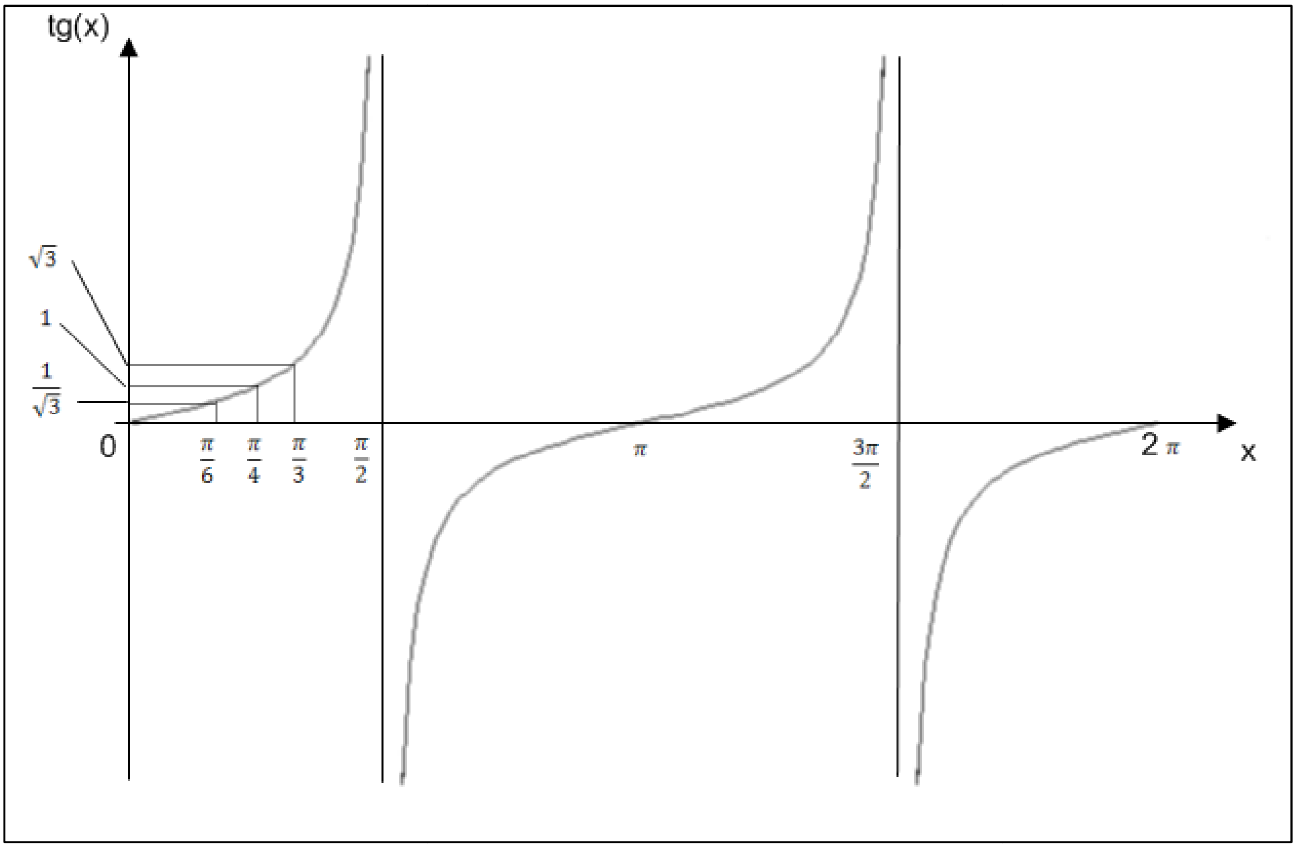
Per $\alpha = 0$, l'ordinata di T è nulla, mentre cresce al crescere di α; man mano che α si avvicina a $\frac{\pi}{2}$, l'ascissa di T cresce sempre di più (tende all'infinito); per $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la retta OP non interseca la retta tangente alla circonferenza passante per A, pertanto il punto T non esiste, così come non esiste la tangente di $\frac{\pi}{2}$.

Consideriamo ora gli angoli compresi tra $\frac{3}{2}\pi$ e 2π: in questo intervallo, T ha ordinata negativa, che diviene nulla per $\alpha = 2\pi$; man mano che α si avvicina a $\frac{3}{2}\pi$, l'ordinata di T decresce sempre di più (tende a meno infinito) e per $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ l'intersezione T non esiste, così come non esiste la tangente di $\frac{3}{2}\pi$.

Nel caso in cui l'angolo α sia compreso tra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$, per ottenere l'intersezione T bisogna considerare il prolungamento di OP dalla parte di O. Intanto osserviamo che per $\alpha = \pi$ T coincide con A, pertanto la sua ordinata è nulla (così come la tangente di π). Per α che si avvicina a $\frac{\pi}{2}$ dal secondo quadrante, l'ordinata del punto T decresce sempre più (tende a meno infinito), mentre per α che si avvicina a $\frac{3}{2}\pi$ dal terzo quadrante, l'ordinata del punto T cresce sempre più (tende ad infinito).



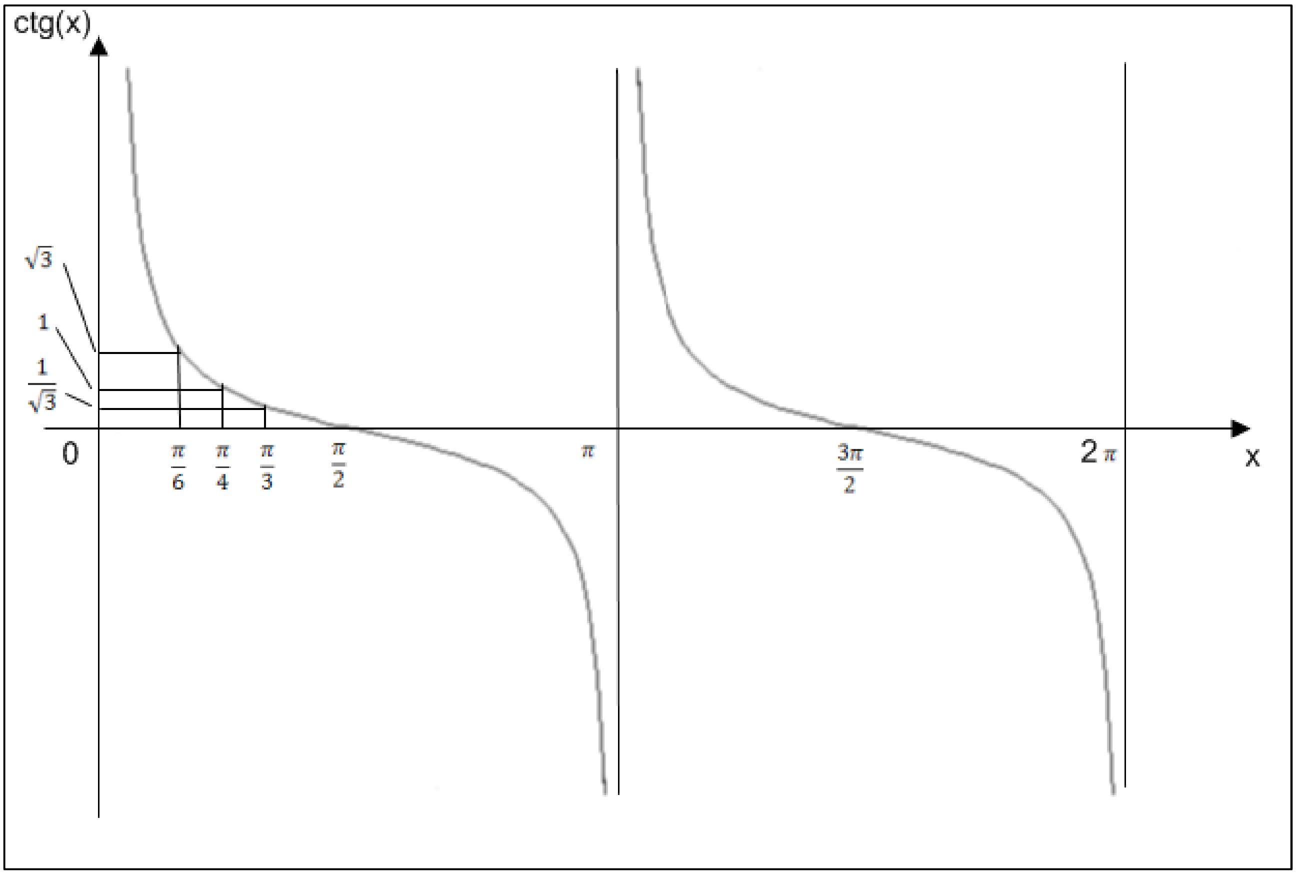
Sulla base delle considerazioni fatte, possiamo disegnale il grafico della tangente (detto **tangentoide**) di un angolo x, per x che varia tra 0 e 2π, mostrato nella seguente figura.



Le due rette parallele all'asse y disegnate in corrispondenza di $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3}{2}\pi$ si chiamano **asintoti**: se consideriamo quello in corrispondenza di $\frac{\pi}{2}$, osserviamo che, man mano che x si avvicina a $\frac{\pi}{2}$, il grafico si avvicina sempre di più all'asintoto, senza mai toccarlo (considerazioni analoghe valgono per l'altro asintoto).

Andamento della cotangente

Attraverso considerazioni analoghe a quelle fatte per la tangente, si può ricavare il grafico della cotangente (detto **cotangentoide**), mostrato nella seguente figura.



In questo caso gli asintoti sono in 0, π e 2π, coerentemente con il fatto che la cotangente non è definita per questi angoli.

Angoli maggiori di un angolo giro

Dal punto di vista geometrico, un angolo giro coincide, di fatto, con l'intero piano, pertanto non possono esistere angoli maggiori di esso. Tuttavia, quando si considerano le misure degli angoli, può essere utile attribuire un significato ad ampiezze maggiori di 360°.

Consideriamo, ad esempio, un angolo di ampiezza 405°.

Facendo riferimento alla figura di pagina 2, se vogliamo rappresentare questo angolo sul piano dotato di circonferenza goniometrica, con le usuali convenzioni, dobbiamo prendere un segmento OP, con P inizialmente coincidente con A, e ruotarlo intorno ad O, in senso antiorario, di 405°: se iniziamo a ruotare il segmento come descritto, il punto P si muove sulla circonferenza goniometrica e, appena si raggiungono i 360°, torna al punto di partenza. A questo punto, per arrivare ad una rotazione di 405°, come richiesto, dobbiamo effettuare un'ulteriore rotazione di 45° (360 + 45 = 405).

Segue che, dal punto di vista geometrico, le ampiezze di 405° e 45° si riferiscono allo stesso angolo. Un ragionamento analogo si può fare per attribuire un significato ad ampiezze minori di 0, considerando, in tal caso, rotazioni in verso negativo, cioè orario.

Più in generale, dato un angolo di ampiezza α compresa tra 0° e 360° (oppure, in radianti, tra 0 e 2π), tutte le ampiezze che si ottengono sommando ad α un multiplo intero di un angolo giro (360° o 2π) si riferiscono allo stesso angolo.

Si usa anche dire che, se α è l'ampiezza dell'angolo AOB, allora OA e OB delimitano infiniti angoli, e precisamente tutti quelli che si ottengono sommando ad α un multiplo intero di un angolo giro, cioè

$$\alpha + k2\pi \quad oppure \quad \alpha + k360°$$

Nelle precedenti espressioni, k può assumere qualunque valore intero, positivo o negativo.

Periodo delle funzioni goniometriche

Ricordiamo innanzitutto che una funzione $f(x)$ si dice **periodica** di periodo T, se per ogni valore di x, risulta sempre $f(x) = f(x+T)$ e T è il più piccolo valore per ciò si verifica; T viene detto **periodo** della funzione.

In pratica, anche se in modo impreciso, si può dire che l'andamento della funzione $f(x)$ si ripete uguale ad intervalli regolari pari a T.

Avendo dato un significato ad angoli di ampiezza negativa o maggiori di un angolo giro, possiamo anche calcolare le funzioni goniometriche per essi e, in particolare, possiamo assumere che, poiché le ampiezze $\alpha + k2\pi$ si riferiscono allo stesso angolo, allora i valori delle funzioni goniometriche calcolati per esse coincidono, cioè:

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + k2\pi)$$

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + k2\pi)$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}(\alpha + k2\pi)$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{ctg}(\alpha + k2\pi)$$

Le funzioni seno e coseno sono quindi periodiche di periodo 2π (oppure 360°).

Per le funzioni tangente e cotangente, bisogna fare un'ulteriore osservazione: dalle formule scritte, sembra che anch'esse siano periodiche di periodo 2π e, in effetti, gli andamenti di esse si ripetono ad intervalli regolari di 2π; tuttavia, la definizione di periodo richiede che questo sia il più piccolo valore per cui l'andamento si ripete e, osservando i grafici di tangente e cotangente, vediamo che l'andamento tra 0 e π coincide con quello tra π e 2π.

Le funzioni tangente e cotangente sono periodiche di periodo π (oppure 180°).

Le formule scritte in precedenza possono essere riscritte come segue:

$$tg\ \alpha = tg\ (\alpha + k\pi)$$

$$ctg\ \alpha = ctg\ (\alpha + k\pi)$$