

I teoremi di Euclide e di Pitagora

In questa dispensa vengono presentati i due teoremi di Euclide ed il teorema di Pitagora, fondamentali per affrontare diverse questioni sui triangoli rettangoli.

I teoremi di Euclide vengono riportati senza dimostrazione, mentre il teorema di Pitagora viene dimostrato a partire dal primo teorema di Euclide.

Nell'ultimo paragrafo vengono presentati degli esercizi svolti che richiedono l'applicazione di questi teoremi.

Copyright © 2010 – Paolo Caramanica – <http://www.trigonometria.org>

Questo documento è rilasciato sotto la licenza

Creative Commons 2.5 Italia by-nc-sa

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/it/>

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/it/legalcode>

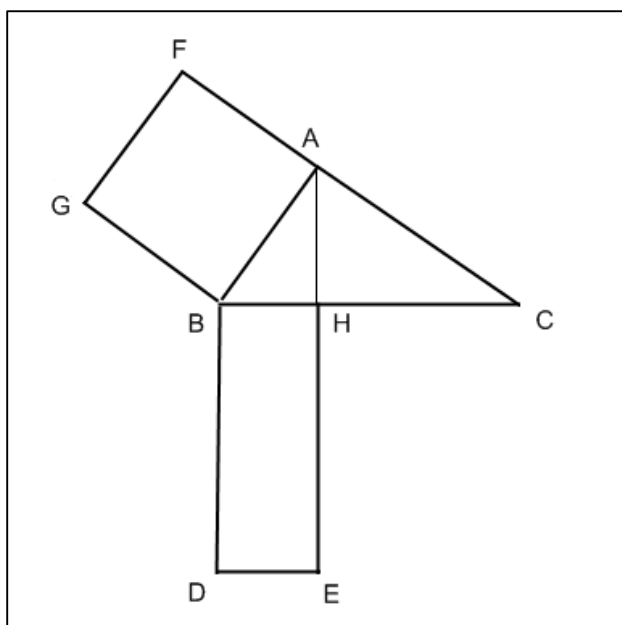
Introduzione

In questa dispensa presenteremo i due teoremi di Euclide e il teorema di Pitagora. Nel farlo, non seguiremo l'ordine storico in cui sono stati formulati questi teoremi, ma l'usuale approccio didattico, che prevede l'introduzione del primo teorema di Euclide e l'utilizzo di esso per dimostrare il teorema di Pitagora; quest'ultimo viene poi utilizzato per provare il secondo teorema di Euclide.

Primo teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa stessa.

Con riferimento alla figura, il triangolo è evidentemente rettangolo in A e la sua ipotenusa è BC. Il quadrato costruito sul cateto AB è ABGF; BH è la proiezione dello stesso cateto AB sull'ipotenusa e BD è uguale a BC per costruzione. Il teorema afferma che il quadrato ABGF e il rettangolo BDEH sono equivalenti.



Di questo teorema omettiamo la dimostrazione.

Il teorema, che abbiamo espresso in termini di equivalenza di superfici piane, può essere espresso in termini di uguaglianza di aree (senza entrare nel merito della teoria della misura, ci limitiamo a ricordare che due superfici piane sono equivalenti se e solo se hanno la stessa area).

In un triangolo rettangolo l'area del quadrato costruito su un cateto è uguale all'area del rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa stessa.

Questa seconda espressione è di fatto quella a cui si fa riferimento negli esercizi.

Con riferimento alla stessa figura e usando la stessa simbologia per indicare i segmenti e la misura di essi, il primo teorema di Euclide si esprime come segue:

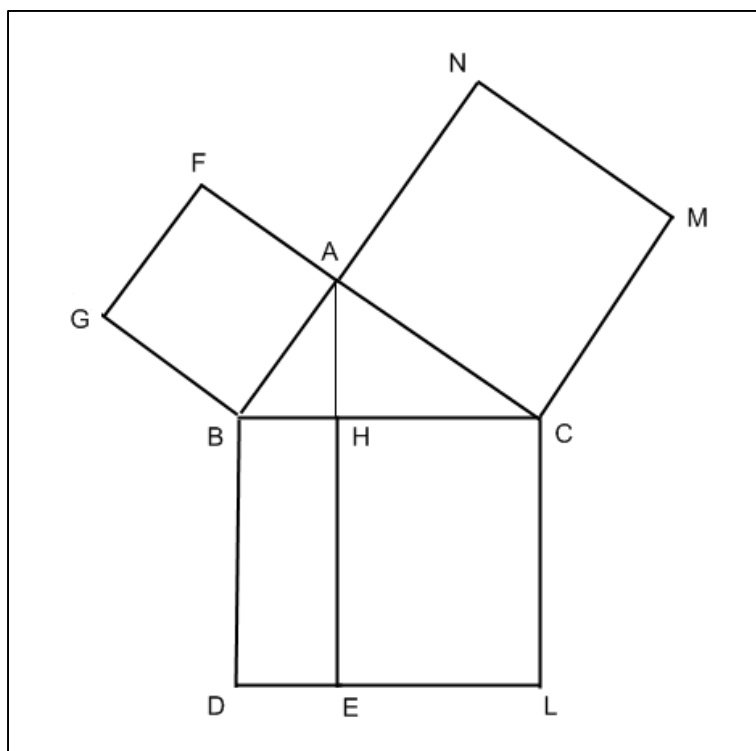
$$AB^2 = BH \cdot BC$$

$$AC^2 = CH \cdot BC$$

Teorema di Pitagora

In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti.

Per dimostrare il teorema, facciamo riferimento alla seguente figura, nella quale ABGF e ACMN sono i quadrati costruiti sui cateti, mentre BCLD è quello costruito sull'ipotenusa.



Applicando il primo teorema di Euclide, si ha che il quadrato ABGF è equivalente al rettangolo BHED e il quadrato ACMN è equivalente al rettangolo HELC. La somma dei due quadrati ABGF e ACMN è quindi equivalente alla somma dei due rettangoli BHED e HELC, ma la somma di questi ultimi coincide proprio con il quadrato costruito sull'ipotenusa: questo dimostra il teorema.

Come per il primo teorema di Euclide, anche in questo caso possiamo riformulare l'enunciato in termini di uguaglianza di aree.

In un triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui due cateti.

In formule si ha:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Da questa espressione si può ricavare la lunghezza dell'ipotenusa note le lunghezze dei cateti:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$$

Data l'importanza del teorema di Pitagora nelle applicazioni, riportiamo anche le formule inverse, che permettono di ricavare la lunghezza di un cateto note le lunghezze dell'ipotenusa e dell'altro cateto:

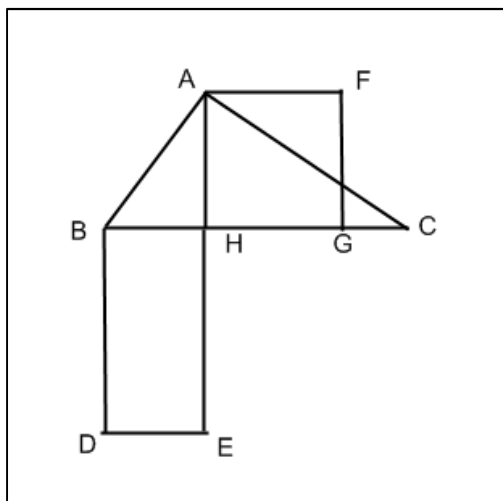
$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$$

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$$

Secondo teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

Con riferimento alla figura, AH è l'altezza relativa all'ipotenusa BC e AFGH è il quadrato costruito su di essa. Il rettangolo BDEH ha, per costruzione, il lato BD uguale a CH. Il teorema afferma che il quadrato AFGH è equivalente al rettangolo BDEH.



Riformuliamo, come fatto in precedenza, il teorema in termini di uguaglianza di aree.

In un triangolo rettangolo l'area del quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è uguale all'area del rettangolo che ha per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

In formule abbiamo:

$$AH^2 = BH \cdot BD$$

Esempi di applicazioni

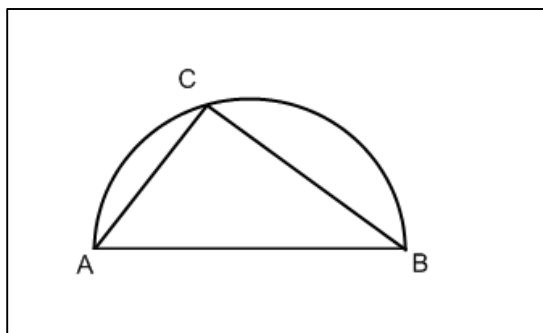
Nei seguenti esercizi, anche se non è esplicitamente indicato, le misure delle lunghezze si intendono espresse in cm, quelle delle superfici in cm^2 .

Esercizi svolti sul teorema di Pitagora

Di seguito presenteremo degli esercizi svolti sul teorema di Pitagora, nei quali rivedremo, tra l'altro, le applicazioni ad altre figure geometriche.

Data una semicirconferenza di diametro $AB = 6$, sia C il punto su di essa tale che $AC = 4$. Calcolare la misura di CB .

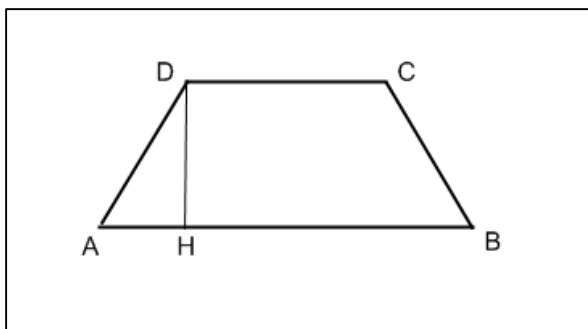
La situazione è illustrata nella seguente figura.



Il triangolo ACB è rettangolo in C , essendo inscritto in una semicirconferenza, pertanto, noto AB (ipotenusa) e AC (cateto), possiamo ricavare BC , che è l'altro cateto, applicando il teorema di Pitagora.

$$CB = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Calcolare l'area di un trapezio isoscele, sapendo che la base maggiore misura 11, la base minore 6 e il lato obliquo 5.



Con riferimento alla figura, cominciamo con il ricavare AH :

$$AH = \frac{AB - CD}{2} = \frac{11 - 6}{2} = \frac{5}{2}$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo AHD, rettangolo in H, possiamo ricavare DH:

$$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

Conoscendo base maggiore, base minore ed altezza, possiamo infine ricavare l'area del trapezio.

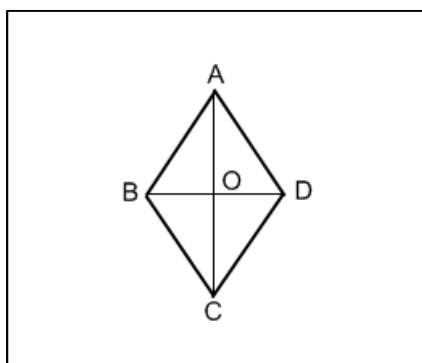
$$Area = \frac{(AB + CD) \cdot DH}{2} = \frac{(11 + 6) \cdot \frac{5}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{85}{4}\sqrt{3}$$

Un rombo ha area pari a 12 e una diagonale di lunghezza 4. Calcolarne il perimetro.

Dette AC e BD le due diagonali del rombo, sia $BD = 4$. Tenendo conto che l'area è data dal semiprodotto delle due diagonali, si può ricavare AC:

$$AC = \frac{2Area}{BD} = \frac{2 \cdot 12}{4} = 6$$

AC è quindi la diagonale maggiore e il rombo può essere disegnato come nella seguente figura.



Per trovare il lato, applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo AOB, rettangolo in O (AO e BO sono le semidiagonali e misurano, rispettivamente, 3 e 2).

$$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

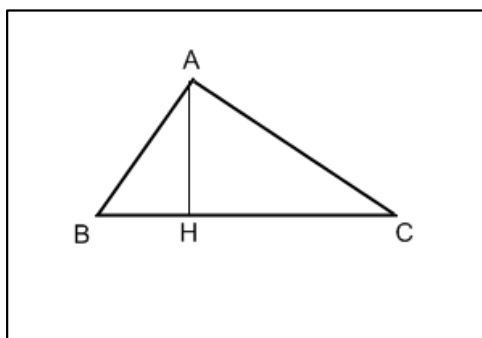
Infine, per il perimetro abbiamo:

$$Perimetro = 4 \cdot AB = 4\sqrt{13}$$

Esercizi svolti sui teoremi di Euclide

In questo sottoparagrafo presentiamo degli esercizi svolti sui due teoremi di Euclide.

Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa di misura 7 e la proiezione di uno dei cateti su di essa di misura 2.5. Trovare i cateti.



Se il cateto di cui è nota la proiezione sull'ipotenusa è AB, allora si ha $BH = 2.5$.

Il cateto AB si ricava osservando che, per il primo teorema di Euclide, si ha:

$$AB^2 = BH \cdot BC$$

Questa si può riscrivere come:

$$AB = \sqrt{BH \cdot BC} = \sqrt{2.5 \cdot 7} = 4.18$$

Per ricavare l'altro cateto, possiamo procedere con il teorema di Pitagora oppure, ancora una volta, con il primo teorema di Euclide. Seguendo questa seconda strada, si ha

$$CH = BC - BH = 7 - 2.5 = 4.5$$

$$AC = \sqrt{CH \cdot BC} = \sqrt{4.5 \cdot 7} = 5.61$$

In un triangolo rettangolo le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano 5 e 12. Calcolare l'area del triangolo.

Con riferimento alla figura per l'esercizio precedente, possiamo ricavare l'ipotenusa:

$$BC = BH + CH = 5 + 12 = 17$$

Applicando il secondo teorema di Euclide, possiamo ricavare l'altezza relativa all'ipotenusa:

$$AH = \sqrt{BH \cdot CH} = \sqrt{5 \cdot 12} = 2\sqrt{15}$$

A questo punto, l'area del triangolo si può calcolare con l'usuale formula, prendendo per base l'ipotenusa:

$$Area = \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{17 \cdot 2\sqrt{15}}{2} = 17\sqrt{15}$$