

Equazioni goniometriche riconducibili a quelle elementari

In questa dispensa vengono presentati diversi esempi di equazioni goniometriche riconducibili a quelle elementari.

Dopo qualche esempio di equazioni immediatamente riconducibili a quelle elementari, si passa a considerare quelle nelle quali una funzione goniometrica compare elevata al quadrato.

Infine si esaminano alcune equazioni goniometriche che possono essere ricondotte a quelle elementari tramite sostituzione.

Copyright © 2010 – Paolo Caramanica – <http://www.trigonometria.org>

Questo documento è rilasciato sotto la licenza

Creative Commons 2.5 Italia by-nc-sa

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/it/>

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/it/legalcode>

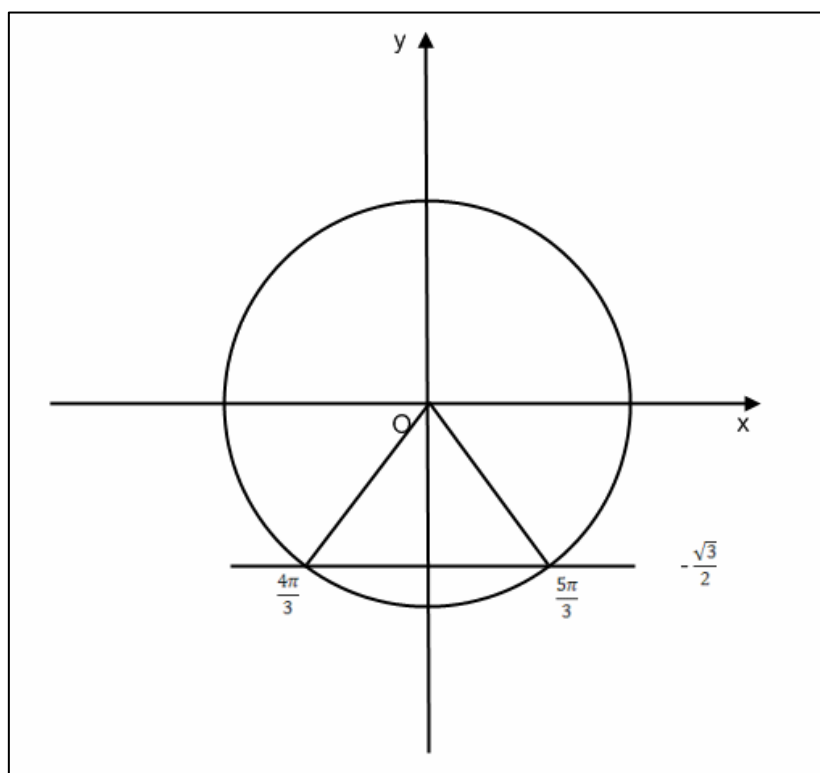
Equazioni immediatamente riconducibili a quelle elementari

In questo primo paragrafo vediamo degli esempi di equazioni immediatamente riconducibili a quelle elementari; per ricondursi alla forma di un'equazione goniometrica elementare sono sufficienti, in questi casi, semplici manipolazioni algebriche, come la moltiplicazione (o divisione) di entrambi i membri per una stessa quantità o l'applicazione della regola del trasporto.

$$2\operatorname{sen}x = -\sqrt{3}$$

In questo caso, per ottenere un'equazione elementare, è sufficiente dividere entrambi i membri per 2; si ottiene:

$$\operatorname{sen}x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Facendo ricorso alla rappresentazione sulla circonferenza goniometrica (ricordando che il seno varia sull'asse delle ordinate), si ottengono immediatamente le due famiglie di soluzioni:

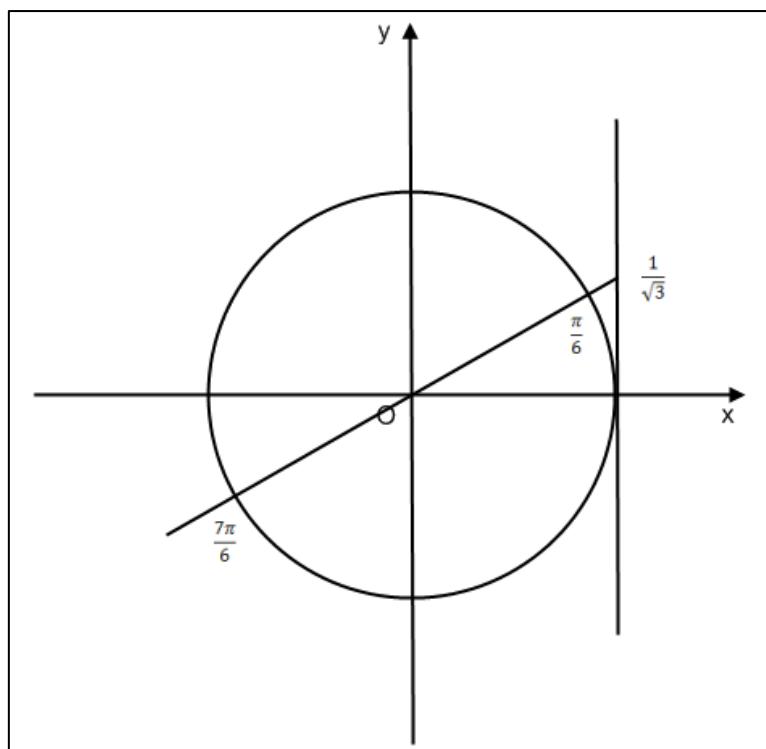
$$x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} x = 1$$

Anche in questo caso ci si riconduce ad un'equazione elementare dividendo primo e secondo membro per una stessa quantità.

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



Ricorrendo alla rappresentazione grafica della tangente sulla circonferenza goniometrica, si ottiene l'insieme di soluzioni:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\sqrt{2} \cos x + 1 = 0$$

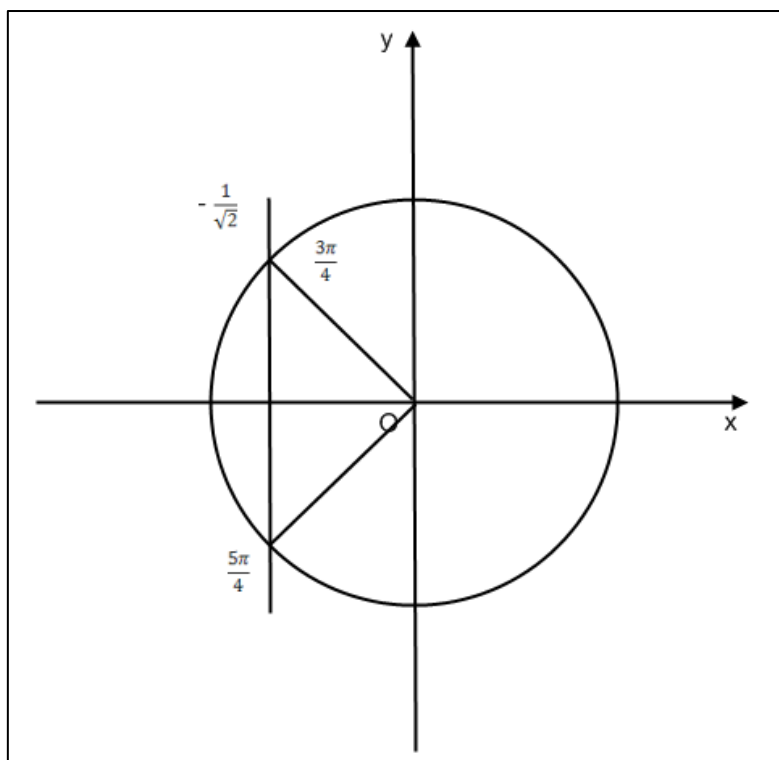
Portando 1 al secondo membro e dividendo per $\sqrt{2}$, si ottiene l'equazione elementare:

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Facendo ancora ricorso alla rappresentazione grafica, si ottengono le due famiglie di soluzioni:

$$x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$$



Equazioni con funzioni goniometriche al quadrato

Le equazioni di questo tipo si riconducono a una coppia di equazioni goniometriche elementari, da risolvere separatamente, come vedremo nei seguenti esempi.

Prima di passare a considerare casi particolari, osserviamo che l'equazione

$$f^2(x) = a$$

(con $a \geq 0$), è equivalente alla coppia di equazioni $f(x) = \sqrt{a}$ e $f(x) = -\sqrt{a}$, cioè ha come soluzioni le soluzioni dell'una, dell'altra o di entrambe.

$$\text{sen}^2 x = \frac{3}{4}$$

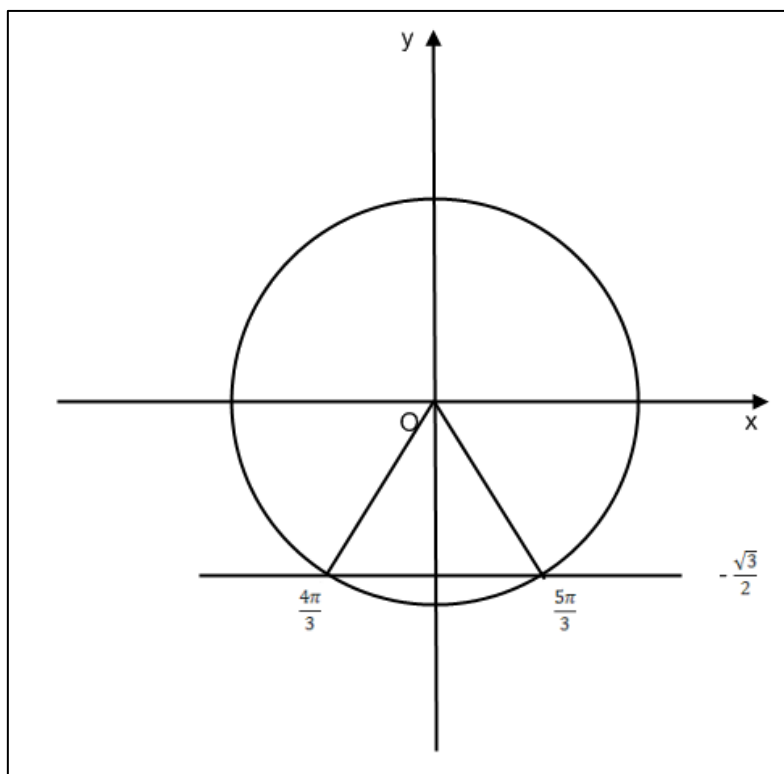
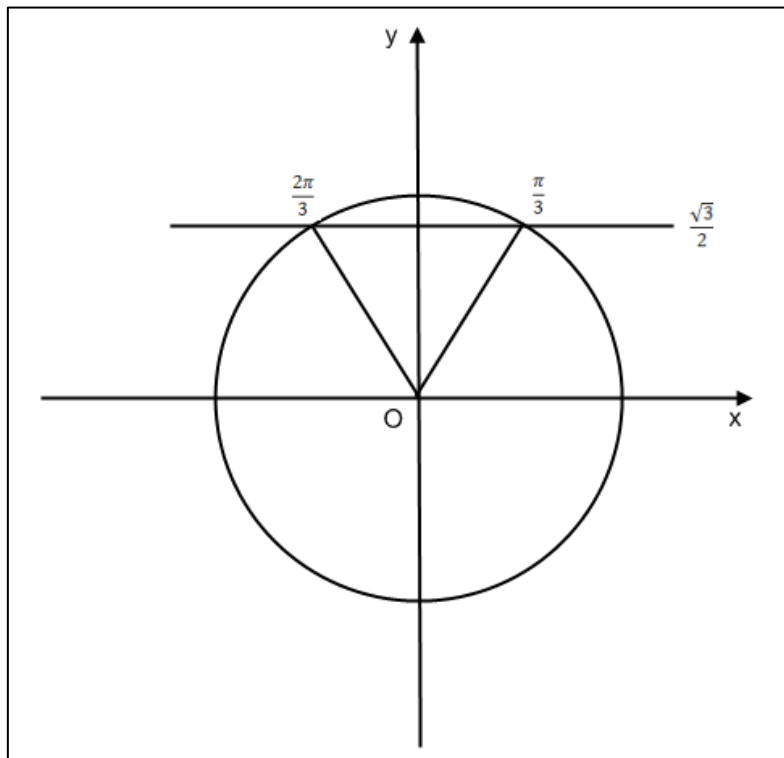
L'equazione è equivalente a

$$\text{sen} x = \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$$

E' necessario risolvere separatamente le due equazioni goniometriche elementari:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad e \quad \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nelle seguenti figure riportiamo la rappresentazione grafica per ciascuna di esse.



La prima equazione ammette le due famiglie di soluzioni:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad e \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

La seconda ammette le due famiglie di soluzioni:

$$x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad e \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

Queste quattro famiglie di soluzioni costituiscono quindi tutte le soluzioni dell'equazione data; esse si possono scrivere in forma più compatta nel modo seguente:

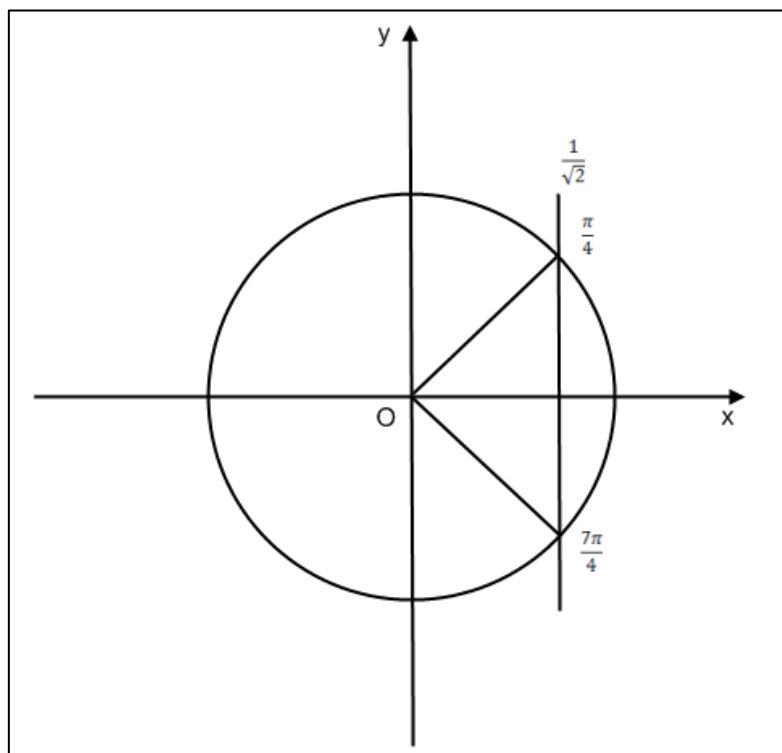
$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad e \quad x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

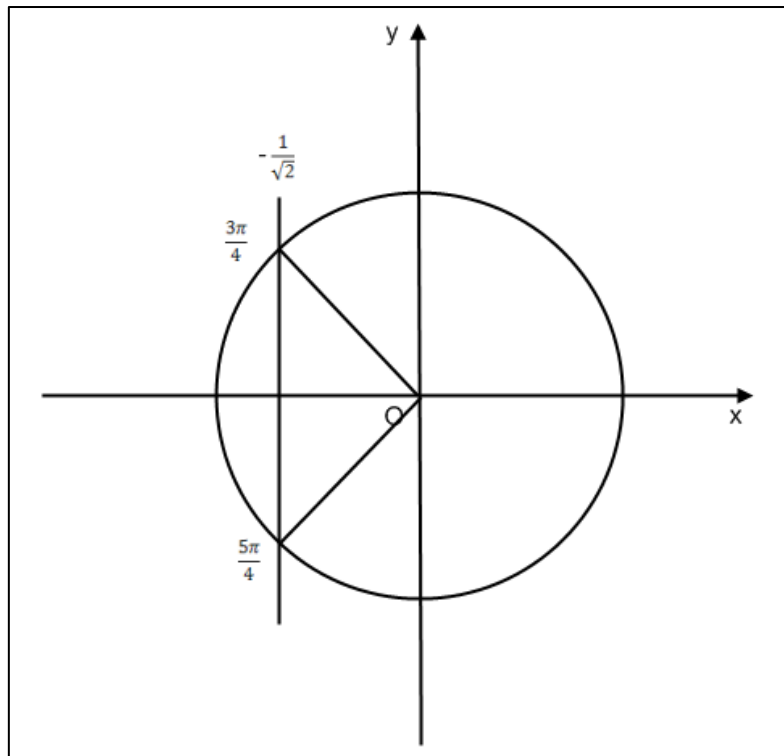
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

Ragionando come nell'esempio precedente, si hanno le due equazioni:

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad e \quad \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ricorrendo al metodo grafico, si hanno le seguenti figure:





La prima equazione fornisce

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad e \quad x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$

La seconda fornisce:

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad e \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

Queste quattro famiglie costituiscono le soluzioni dell'equazione data e si possono scrivere in forma compatta:

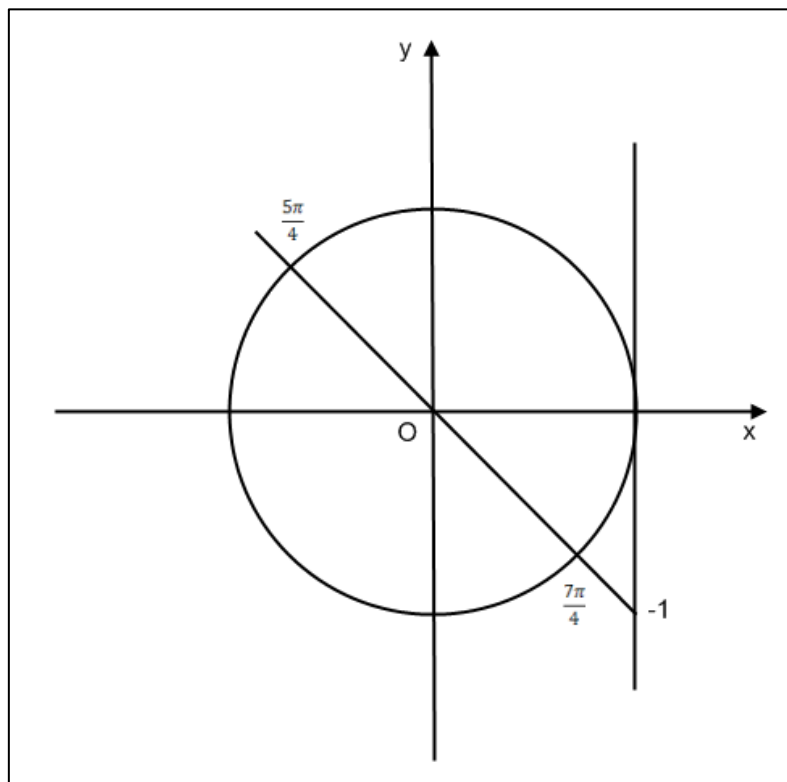
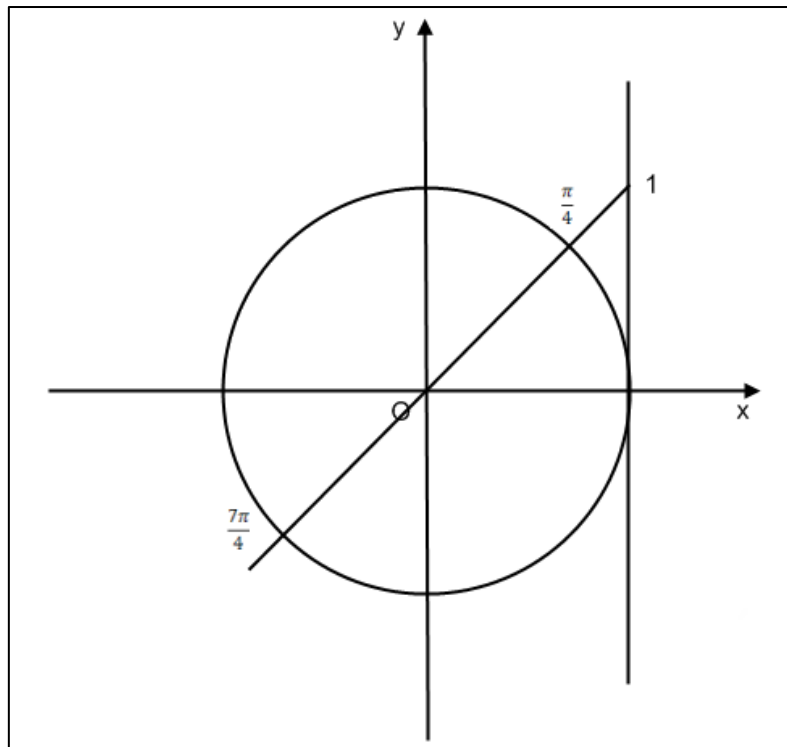
$$x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$$

$$tg^2 x = 1$$

Questa equazione si riconduce alle due equazioni goniometriche elementari

$$tgx = 1 \quad e \quad tgx = -1$$

Ricorrendo ancora al metodo grafico, si ottengono le figure seguenti:



Le soluzioni sono

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad e \quad x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

In forma compatta si ha $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Equazioni goniometriche risolvibili per sostituzione

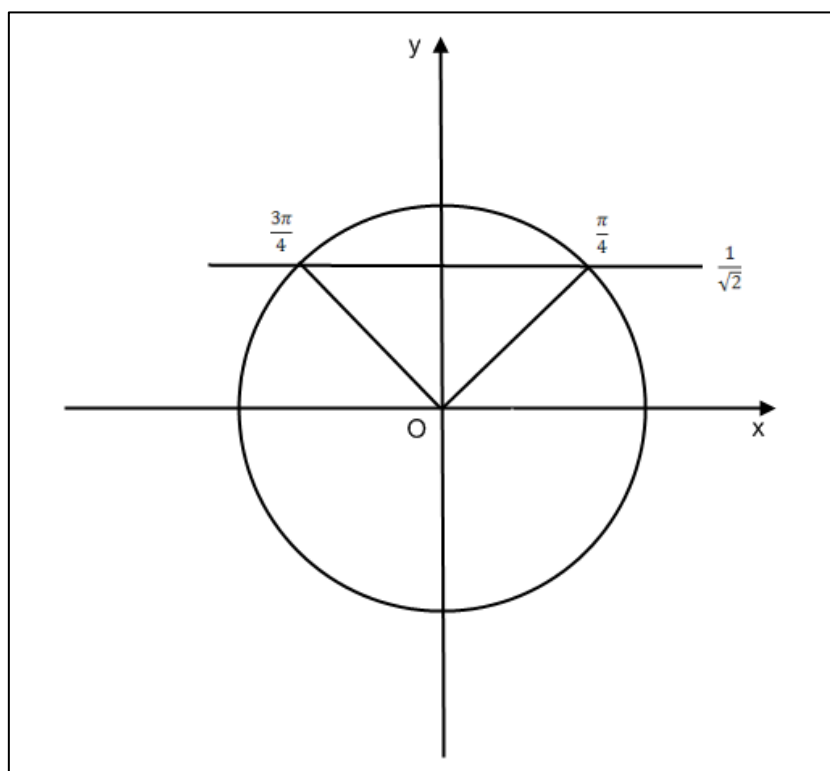
In questo tipo di equazioni, come argomento della funzione goniometrica non c'è l'incognita x , ma una funzione di essa. Tramite una sostituzione (cioè un cambio di variabile) ci si riconduce alle equazioni goniometriche elementari, come vediamo nei prossimi esempi.

$$\operatorname{sen}\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ponendo $y = 4x - \frac{\pi}{3}$, l'equazione diventa:

$$\operatorname{sen} y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Questa è un'equazione goniometrica elementare in y .



Le due famiglie di soluzioni sono $y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ e $y = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$. Queste sono espresse nell'incognita y , mentre l'equazione data è in x . Per avere le soluzioni espresse rispetto a x , dobbiamo innanzitutto invertire la relazione che lega x e y .

$$y = 4x - \frac{\pi}{3}$$

$$4x = y + \frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{1}{4}y + \frac{\pi}{12}$$

Le due famiglie di soluzioni espresse in x sono:

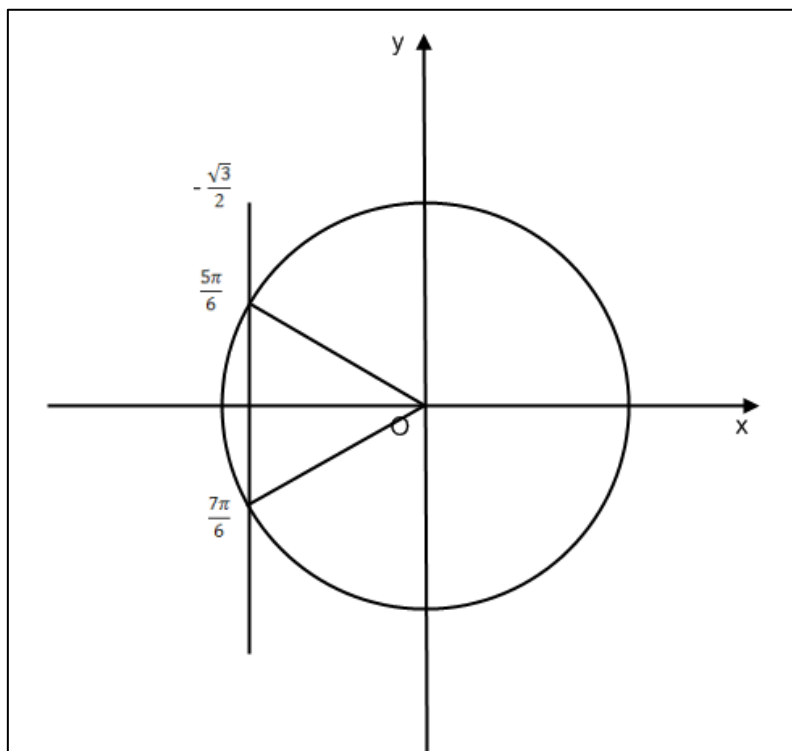
$$x = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{1}{4}\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) + \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$$

$$2\cos(2x - \pi) = -\sqrt{3}$$

Ponendo $y = 2x - \pi$, si ha: $2\cos y = -\sqrt{3}$, cioè

$$\cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Le soluzioni in y sono $y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ e $y = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$.

Esplicitando la x rispetto alla y si ha:

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{\pi}{2}$$

Le due famiglie di soluzioni espresse x sono:

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right) + \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{12} + k\pi$$

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right) + \frac{\pi}{2} = \frac{13\pi}{12} + k\pi$$

$$2\sin(7x - 1) = 3$$

Dividendo primo e secondo membro per 2, si ha

$$\sin(7x - 1) = \frac{3}{2}$$

Senza procedere al cambio di variabile, possiamo subito dire che l'equazione è impossibile, essendo $\frac{3}{2} > 1$ ed essendo il seno di qualunque angolo compreso tra -1 e 1.