Equazioni goniometriche risolvibili per confronto di argomenti

In questa dispensa si esaminano le **equazioni goniometriche** costituite dall'uguaglianza di due funzioni goniometriche, nei cui argomenti compare l'incognita.

Queste equazioni si risolvono imponendo opportune relazioni tra gli argomenti delle funzioni, tenendo conto delle proprietà degli **angoli associati**.

Introduzione

In questa dispensa esamineremo delle **equazioni** costituite dall'uguaglianza tra due **funzioni goniometriche**, nei cui argomenti compare l'incognita, ad esempio

$$\sin(f(x)) = \sin(g(x))$$

In questo caso, possiamo subito osservare che due angoli hanno lo stesso seno se sono uguali o se differiscono di un multiplo intero di un angolo giro, ma questo non è l'unico caso, infatti, dalle proprietà degli angoli associati, sappiamo che due angoli hanno lo stesso seno anche se sono supplementari (sempre a meno di un multiplo intero di un angolo giro).

In generale, le equazioni di questo tipo si risolvono imponendo opportune uguaglianze tra gli argomenti delle funzioni goniometriche e tenendo conto delle proprietà degli **angoli associati**; nei prossimi paragrafi vediamo tutto ciò su esempi concreti.

Uguaglianza tra due funzioni goniometriche

In questo paragrafo mostriamo il procedimento di risoluzione nei casi più semplici.

$$\boxed{\sin 4x = \sin 2x}$$

Due angoli hanno lo stesso seno se sono uguali oppure supplementari, a meno di un multiplo intero di 360°: questi due casi vanno trattati separatamente e portano a due famiglie di soluzioni.

La prima famiglia di soluzioni si ottiene imponendo che i due angoli siano uguali a meno di un multiplo intero di 360°:

$$4x = 2x + k360°$$

Risolvendo rispetto ad x:

$$2x = k360°$$

$$x = k180°$$

La seconda famiglia di soluzioni si ottiene imponendo che i due angoli siano supplementari a meno di un multiplo intero di 360°:

$$4x = 180° - 2x + k360°$$

Risolvendo si ha:

$$6x = 180° + k360°$$

$$x = 30° + k60°$$

Le soluzioni dell'equazione data sono, quindi, $x = k180°$ e $x = 30° + k60°$, al variare di k negli interi relativi.

$$\cos 3x = \cos x$$

Due angoli hanno lo stesso coseno se sono uguali o se sono uno l'opposto dell'altro, a meno di un multiplo intero di 360°.

Imponendo l'uguaglianza tra gli angoli, si ha:

$$3x = x + k360°$$

e quindi $x = k180°$.

Imponendo che gli angoli siano l'uno l'opposto dell'altro, si ha:

$$3x = -x + k360°$$

e risolvendo, si ottiene $x = k90°$.

Osservando che le soluzioni della prima famiglia sono contenute nella seconda (infatti, i multipli di 180° sono anche multipli di 90°, ma non viceversa), possiamo concludere che tutte le soluzioni dell'equazione data sono $x = k90°$ (al variare di k negli interi relativi).

$$tg\ 5x = tg\ 2x$$

La tangente di un angolo è una funzione periodica di periodo 180° e all'interno di un periodo non assume mai due volte lo stesso valore, pertanto due angoli hanno la stessa tangente solo se sono uguali o differiscono di un multiplo intero di 180°.

L'unica famiglia di soluzioni si ottiene imponendo:

$$5x = 2x + k180°$$

Risolvendo rispetto ad x:

$$x = k60°$$

Queste sono le soluzioni cercate.

$$\sin 4x = \cos 2x$$

In questo caso, abbiamo l'uguaglianza tra un seno e un coseno: possiamo ricondurci a uno dei casi precedenti utilizzando le proprietà degli angoli associati e, in particolare, ricordando che

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$$

Applicando questa formula al secondo membro abbiamo

$$\cos 2x = \sin(90° - 2x)$$

L'equazione data può essere riscritta come:

$$\sin 4x = \sin(90° - 2x)$$

Ragionando come nel primo esempio visto, si hanno due famiglie di soluzioni.

La prima famiglia si ottiene imponendo l'uguaglianza degli angoli:

$$4x = 90° - 2x + k360°$$

e risolvendo

$$x = 15° + k60°$$

La seconda famiglia si ottiene imponendo che i due angoli siano supplementari :

$$4x = 180° - 90° + 2x + k360°$$

e risolvendo

$$x = 45° + k180°$$

$$\boxed{tg\ 3x = ctg\ 2x}$$

Tenendo conto che $ctg\ \alpha = tg(90° - \alpha)$, l'equazione si può riscrivere come:

$$tg\ 3x = tg(90° - 2x)$$

Ragionando come nel terzo esempio visto, questa equazione ha una sola famiglia di soluzioni, che si ottiene imponendo che i due angoli siano uguali (a meno di k180°):

$$3x = 90° - 2x + k180°$$

e risolvendo

$$x = 18° + k36°$$

Uguaglianza tra i quadrati di funzioni goniometriche

In questo paragrafo consideriamo i casi in cui le funzioni goniometriche compaiono elevate al quadrato e mostriamo, con degli esempi, come ci si possa ricondurre ai casi precedenti.

In generale, data un'equazione del tipo

$$f^2(x) = g^2(x)$$

estraendo la radice quadrata di entrambi i membri, si ha:

$$f(x) = \pm g(x)$$

Bisogna quindi risolvere separatamente le due equazioni $f(x) = g(x)$ e $f(x) = -g(x)$.

$$\boxed{sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = sin^2 2x}$$

Per quanto detto all'inizio del paragrafo, vanno risolte separatamente le due equazioni $sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sin 2x$ e $sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = -\sin 2x$.

Cominciamo a risolvere la prima:

$$sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sin 2x$$

Questa è dello stesso tipo del primo esempio visto nel paragrafo precedente.

Imponendo l'uguaglianza degli argomenti, si ha:

$$\frac{\pi}{4} - 3x = 2x + 2k\pi$$

e risolvendo

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}k\pi$$

Imponendo che i due angoli siano supplementari, si ha:

$$\frac{\pi}{4} - 3x = \pi - 2x + 2k\pi$$

e risolvendo

$$x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$$

Passiamo ora a considerare la seconda equazione:

$$sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = -\sin 2x$$

Per risolverla, bisogna ancora far riferimento alle proprietà degli angoli associati: in particolare osserviamo che due angoli hanno seni opposti quando sono opposti oppure la differenza tra i due è un angolo piatto (il tutto sempre a meno di un multiplo intero di un angolo giro).

Imponendo che i due angoli siano opposti si ha:

$$\frac{\pi}{4} - 3x = -2x + 2k\pi$$

e risolvendo

$$x = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi$$

Imponendo che la somma di uno degli angoli con l'opposto dell'altro sia π, si ha:

$$\frac{\pi}{4} - 3x - 2x = \pi + 2k\pi$$

e risolvendo

$$x = -\frac{3}{20}\pi + \frac{2}{5}k\pi$$

Ricapitolando, l'equazione di partenza ammette ben quattro famiglie di soluzioni e precisamente: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}k\pi$, $x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $x = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi$ e $x = -\frac{3}{20}\pi + \frac{2}{5}k\pi$.

$$\boxed{cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = cos^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Le due equazioni, da risolvere separatamente, sono $cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ e $cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Cominciamo dalla prima:

$$cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Come visto nel secondo esempio del paragrafo precedente, gli argomenti dei due coseni devono essere uguali oppure opposti.

Imponendo l'uguaglianza, si ha:

$$x + \frac{\pi}{3} = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Come è facile verificare, questa non ammette soluzioni.

Imponendo che i due angoli siano l'uno l'opposto dell'altro, si ha:

$$x + \frac{\pi}{3} = -x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Risolvendo si ha

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi$$

Passiamo ora alla seconda equazione:

$$cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Dalle proprietà degli angoli associati, $\cos\alpha = -\cos\beta$ se $\alpha = \pi - \beta$ oppure $\alpha = \pi + \beta$ (come al solito, a meno di multipli interi di 2π).

Imponendo la prima relazione, abbiamo:

$$x + \frac{\pi}{3} = \pi - x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Risolvendo si ha:

$$x = \frac{7}{12}\pi + k\pi$$

Imponendo la seconda relazione, si ha:

$$x + \frac{\pi}{3} = \pi + x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Quest'ultima non ammette soluzioni.

Ricapitolando, abbiamo trovato in tutto due famiglie di soluzioni, precisamente: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ e $x = \frac{7}{12}\pi + k\pi$, che, come è facile verificare, rappresentano lo stesso insieme.

$$sin^2 2x = cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Innanzitutto, tenendo conto che

$$cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

possiamo riscrivere l'equazione

$$sin^2 2x = sin^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

che è dello stesso tipo di quella presentata nel primo esempio del paragrafo, pertanto può essere ricondotta alla coppia di equazioni $\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ e $\sin 2x = -\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

Risolviamo la prima:

$$\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

Imponendo l'uguaglianza degli argomenti, si ha

$$2x = \frac{\pi}{6} - x + 2k\pi$$

e quindi

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi$$

Imponendo che i due angoli siano supplementari, si ha:

$$2x = \pi - \frac{\pi}{6} + x + 2k\pi$$

e quindi

$$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

Risolviamo la seconda:

$$\sin 2x = -\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

Imponendo che i due angoli siano uno l'opposto dell'altro, si ha:

$$2x = -\frac{\pi}{6} + x + 2k\pi$$

e quindi

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Imponendo che la differenza dei due angoli sia π, si ha:

$$2x = \frac{\pi}{6} - x + \pi + 2k\pi$$

e quindi

$$x = \frac{7}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi$$

Le quattro famiglie di soluzioni trovate possono scriversi in modo compatto come $x = \frac{5}{6}\pi + k\pi$ e $x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}$.

$$\boxed{ctg^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = tg^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

Dalle proprietà degli angoli associati, si ha che:

$$ctg\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = tg\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{3}\right) = tg\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

Ciò ci permette di riscrivere l'equazione data nella forma

$$tg^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = tg^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Al solito, dobbiamo risolvere separatamente le seguenti due equazioni: $tg\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ e $tg\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Risolviamo la prima:

$$tg\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

Procedendo come nel terzo esempio del paragrafo precedente, si ha:

$$\frac{\pi}{6}-x=\frac{\pi}{2}-x+k\pi$$

che, evidentemente, non ammette soluzioni.

Risolviamo la seconda:

$$tg\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=-tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

Dalle proprietà degli angoli associati, due angoli hanno tangenti opposte se sono opposti, a meno di un multiplo intero di π, quindi:

$$\frac{\pi}{6}-x=-\frac{\pi}{2}+x+k\pi$$

Risolvendo, si ha:

$$x=\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}$$

Questa è l'unica famiglia di soluzioni per l'equazione data.